Politecnico di Milano **Analisi Matematica 1** Anno Accademico 2017-2018 Prof. Ettore Lanzarone	Appello 22 febbraio 2018
NOME______ COGNOME______ MATRICOLA______	

Parte A: punteggio 6/30; soglia minima per passare la prova 2/30 (ogni risposta giusta ad un quesito vale 1 punto, ogni risposta errata vale -0.25 punti, ogni risposta in bianco vale 0 punti)
Parte T: punteggio 10/30: soglia minima per passare la prova 4/30
Parte B: punteggio 17/30; soglia minima per passare la prova 8/30

Voto complessivo minimo per passare la prova 18/30. Tempo a disposizione 2 ore e 30 minuti. Non si ritirano fogli di brutta: consegnare soltanto questo plico costituito da 7 fogli. Scrivere nome, cognome e matricola su ogni foglio nello spazio apposito; intestazioni in bianco annullano la prova. Chi viene sorpreso a copiare, parlare o consultare materiale verrà espulso e la prova annullata.

PARTE A

Quesito 1 (1/0/-0.25 punti)

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1, invertibile, con $f(0) = 2$ e $f'(0) = 3$.
Detta $g = f^{-1}$ la funzione inversa di f, allora

- ☐ $g'(2) = 3$;
- ☐ $g'(2) = \frac{1}{3}$; **RISPOSTA CORRETTA**
- ☐ $g'(2) = -3$;
- ☐ $g'(2)$ potrebbe non essere definita.

Quesito 2 (1/0/-0.25 punti)

L'insieme $A = \{z \in C | z\bar{z} = 1\}$ nel piano complesso

- ☐ è costituito da 2 punti;
- ☐ è costituito da due rette che si intersecano in $z = 1$;
- ☐ è costituito da una circonferenza centrata in $z = 0$ e con raggio 1; **RISPOSTA CORRETTA**
- ☐ è vuoto.

Quesito 3 (1/0/-0.25 punti)

Data la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty}$

- ☐ può essere indererminata;
- ☐ converge necessariamente;
- ☐ se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora converge;
- ☐ se converge, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. **RISPOSTA CORRETTA**

Quesito 4 (1/0/-0.25 punti)

La funzione

$$F(x) = \int_1^x (t+4)\,dx$$

- ☐ ha un minimo in $x = 1$
- ☐ ha un minimo in $x = -4$ **RISPOSTA CORRETTA**
- ☐ ha un massimo in $x = 1$
- ☐ ha un massimo in $x = -4$

Quesito 5 (1/0/-0.25 punti)

Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n+1}\right)$, essa

- ☐ converge semplicemente ma non assolutamente
- ☐ converge assolutamente e semplicemente
- ☐ diverge **RISPOSTA CORRETTA**
- ☐ è indeterminata

Quesito 6 (1/0/-0.25 punti)

Data una funzione $f(x)$ definita in $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ e derivabile in x_0, allora

- ☐ $f(x)$ è continua in x_0; **RISPOSTA CORRETTA**
- ☐ $f'(x_0) > 0$;
- ☐ $f(x)$ è continua in $[x_0 - 1, x_0 + 1]$;
- ☐ $f(x)$ è integrabile in $[x_0 - 1, x_0 + 1]$;

PARTE T

Domanda 1 (5 punti)

Enunciare e dimostrare la formula di Taylor con resto secondo Peano.

Il teorema è disponibile sul testo di riferimento.

Domanda 2 (2 punti)

Data una funzione $f(x)$ dare la definizione di derivata in un generico punto x_0.

Esprimere il limite rapporto incrementale in x_0.
La derivata è questo limite se <u>ESISTE</u> <u>FINITO</u>.

Domanda 3 (3 punti)

Enunciare il teorema della media integrale.
Far vedere che se cade l'ipotesi di continuità la tesi non è più garantita.

Il teorema è disponibile sul testo di riferimento.
Per il secondo punto, se cade la continuità non è più detto che il rapporto tra integrale e ampiezza dell'intervallo sia ancora uguale alla funzione in un punto; inoltre se cade la continuità non è neanche più detto che la funzione sia integrabile.

PARTE B

Esercizio 1 (2.5+1.5 punti)

a. Verificare che l'equazione

$$z^3 - (1-2i)\,z^2 - \left[2 + i\left(2+\sqrt{3}\right)\right] z + \left(2 + i\sqrt{3}\right) = 0$$

con $z \in \mathbb{C}$, ammette una radice reale di modulo unitario e trovare le altre radici.

b. Detto $\mathcal{T}$ l'insieme delle soluzioni, disegnarlo sul piano di Gauss (esplicitando per ogni soluzione la parte reale e la parte immaginaria).

Soluzioni

Le radici reali con modulo unitario possono essere 1 e -1. Sostituendo $z = 1$ si ottiene $0 = 0$ ed e' quindi la soluzione cercata: $z_1 = 1$.
L'equazione si puo' quindi scomporre come segue:

$$(z-1)\left[z^2 + 2iz - \left(2 + i\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

Le altre soluzioni si ottengono come segue:

$$\left[z^2 + 2iz - \left(2 + i\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow z = -i + \sqrt{1 + i\sqrt{3}}$$

Devo svuluppare per poterle disegnare nel piano di Gauss. La radice vale (considerando che il radicando ha modulo 2 e fase $\frac{\pi}{3}$):

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right)$$

Quindi le altre due soluzioni sono:

$$z_2 = -i + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

$$z_3 = -i - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + i\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

A questo punto e' immediato disegnare i 3 punti sul piano di Gauss.

Esercizio 2 (0.5+0.5+2+1 punti)

Data la funzione

$$f(x) = x\frac{log(x) - 1}{log(x) - 3}$$

determinare:

a. dominio;

b. asintoti;

c. massimi e minimi locali e globali;

d. grafico qualitativo (utilizzando le informazioni ricavate finora, mentre non si richiede lo studio della derivata seconda).

Soluzioni

Dominio:

$$x \in (0, e^3) \cup (e^3, +\infty)$$

Esiste asintoto verticale in $x = e^3$:

$$lim_{x \to e^{3-}} f(x) = -\infty$$

$$lim_{x \to e^{3+}} f(x) = \infty$$

$$x = e^3$$

Non c'è Asintoto obliquo in $x =\to +\infty$:

$$lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \infty$$

Derivata:

$$f'(x) = \frac{log^2(x) - 4log(x) + 1}{[log(x) - 3]^2}$$

Minimo:

$$x = e^{2+\sqrt{3}}; \;\; y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}e^{2+\sqrt{3}}$$

Massimo:

$$x = e^{2-\sqrt{3}}; \;\; y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}e^{2-\sqrt{3}}$$

Disegno di conseguenza.

Esercizio 3 (2+2 punti)

Dato l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{(\sin x)^{1-\alpha}}dx$$

a. Stabilire per quali α l'integrale converge;

b. calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 1$.

Soluzioni

a. Notiamo preliminarmente che la funzione integranda é continua su tutto l'intervallo di integrazione, e di conseguenza tale integrale é un integrale generalizzato di prima specie. Inoltre, é positiva su $(0, 1]$. E' pertanto possibile applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché, per $x \to 0^+$, la funzione è asintotica a

$$\sim \frac{x^{1/2}}{x^{1-\alpha}} = x^{-1/2+\alpha},$$

si ha quindi che

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{(\sin x)^{1-\alpha}}dx \quad \begin{cases} \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad -1/2+\alpha > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > -1/2 \\ \text{diverge} \quad \Longleftrightarrow \quad -1/2+\alpha \le -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \le -1/2. \end{cases}$$

b. Sia $\alpha = 1$. Poiché

$$\int \left(e^{\sqrt{x}}-1\right)dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) - x + cost$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_1(x)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \left(e^{\sqrt{x}}-1\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)-x\right]_\varepsilon^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-1-2e^{\sqrt{\varepsilon}}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right)+\varepsilon\right] = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (2+3 punti)

a. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n^2 log(n)}{2^n};$$

b. Dopo aver giustificato la convergenza della serie

$$\sum_{2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n log(n)},$$

determinare il minimo valore N tale che $\sum_2^N \frac{(-1)^n}{2^n log(n)}$ approssimi la somma della serie con un errore $< 10^{-3}$.

Soluzioni

a. La serie converge per il criterio del rapporto, o si può trovare facilmente una serie maggiorante convergente.

b. La serie converge per il criterio di Leibnitz.

Per il valore N, la serie è a segni altertni e quindi l'errore è al massimo il modulo del primo termine trascurato.

N	a_N	$\sum_2^N \frac{(-1)^n}{2^n log(n)}$
2	0.36067	0.36067
3	-0.11378	0.24689
4	0.04508	0.29198
5	-0.01942	0.27256
6	0.00872	0.28128
7	-0.00401	0.27727
8	0.00188	0.27915
9	-0.00089	0.27826
10	0.00042	0.27868
11	-0.00020	0.27848

Basta quindi fermarsi a $N = 8$.