Politecnico di Milano **Analisi Matematica 1** Anno Accademico 2017-2018 Prof. Ettore Lanzarone	Seconda prova in itinere 23 gennaio 2018
NOME________________ COGNOME________________ MATRICOLA________________	

Parte A: punteggio 6/30; soglia minima per passare la prova 2/30 (ogni risposta giusta ad un quesito vale 1 punto, ogni risposta errata vale -0.25 punti, ogni risposta in bianco vale 0 punti)
Parte T: punteggio 10/30: soglia minima per passare la prova 4/30
Parte B: punteggio 17/30; soglia minima per passare la prova 8/30

Voto complessivo minimo per passare la prova 18/30. Tempo a disposizione 2 ore e 15 minuti. Non si ritirano fogli di brutta: consegnare soltanto questo plico costituito da 8 fogli. Scrivere nome, cognome e matricola su ogni foglio nello spazio apposito; intestazioni in bianco annullano la prova. Chi viene sorpreso a copiare, parlare o consultare materiale verrà espulso e la prova annullata.

PARTE A

Quesito 1 (1/0/-0.25 punti)

L'integrale $\int \frac{2}{1-x^2}dx$ vale

- [ ] $2\arctan x + c$
- [ ] $2\arcsin x + c$
- [x] $\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
- [ ] $\frac{1}{2}\log|1-x^2| + c$

Quesito 2 (1/0/-0.25 punti)

Data la funzione $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{per } x \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$, allora

- [ ] $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$
- [ ] $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$
- [ ] $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$
- [x] non è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$

MATRICOLA NOME E COGNOME

Quesito 3 (1/0/-0.25 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^4 e $f(x) = x + \frac{x^4}{6} - x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$

- [x] $f^{(iv)}(0) = \frac{4!}{6}$
- [ ] $f^{(iv)}(0) = \frac{1}{6 \cdot 4!}$
- [ ] $f^{(iv)}(0) = \frac{1}{6}$
- [ ] $f^{(iv)}(0) = 6$

Quesito 4 (1/0/-0.25 punti)

La funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{t-3}{e^t(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

- [ ] non è definita in $x = 3$
- [ ] è definita ma non derivabile in $x = 3$
- [x] ha un minimo in $x = 3$
- [ ] ha un massimo in $x = 3$

Quesito 5 (1/0/-0.25 punti)

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$, essa

- [ ] converge semplicemente ma non assolutamente
- [x] converge assolutamente e semplicemente
- [ ] diverge
- [ ] è indeterminata

Quesito 6 (1/0/-0.25 punti)

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n \log \sqrt{n}}$, essa

- [x] converge semplicemente ma non assolutamente
- [ ] converge assolutamente e semplicemente
- [ ] diverge
- [ ] è indeterminata

MATRICOLA NOME E COGNOME

PARTE T

Domanda 1 (5 punti)

Enunciare e dimostrare il criterio della radice per la convergenza delle serie numeriche.

VEDERE TESTO.

BRAMANTI, PAGANI, SALSA
PAG. 236 E 237-238

MATRICOLA NOME E COGNOME

Domanda 2 (2 punti)

Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

VEDERE TESTO

BRAMANTI, PAGANI, SALSA
PAG 307

Domanda 3 (3 punti)

Mostrare che, se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Mostrare poi che, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, non è necessario che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga.

(1) SI PUÒ MOSTRARE IN DIVERSI MODI, MA NON ATTRAVERSO ESEMPI

UN MODO È:

CONTROINVERSA $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to$ SERIE DIVERGE

SOMMO ∞ TERMINI $\neq 0$, QUINDI DIVERGE

(2) ES: $a_n = \frac{1}{n}$

MATRICOLA NOME E COGNOME

PARTE B

Esercizio 1 (4 punti)

Calcolare

$$\int_0^2 3x^2 \log(x^2+1)\, dx. =$$

PER PARTI

$$= x^3 \log(x^2+1) - 2\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx =$$

$$= x^3 \log(x^2+1) - 2\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= x^3 \log(x^2+1) - \frac{2}{3}x^3 + 2x - 2\operatorname{arctg}(x) + \underline{\text{COSTANTE}}$$

Esercizio 2 (4 punti)

Determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$$

converge.

Se $x>0$ criterio del RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}/(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{x^n/n^2 \cdot 3^n} = \frac{x}{3} \quad \frac{n^2+2n+1}{n^2} \longrightarrow \frac{x}{3}$$

converge se $\frac{x}{3} < 1$

$\boxed{\text{quindi converge se } 0 < x < 3}$

diverge se $\frac{x}{3} > 1$

$\boxed{\text{quindi diverge se } x > 3}$

Se $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{CONVERGE}$$

Se $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n^2 3^n} = 0 \quad \text{CONVERGE}$$

Se $x < 0$

la serie converge per $0 \leq x \leq 3$ (VEDI SOPRA)

Quindi la serie converge assolutamente tra $-3 \leq x \leq 0$, cioé converge anche semplicemente.

E per $x < -3$?

Diverge, si vede direttamente.

MATRICOLA NOME E COGNOME

Esercizio 3 (2+2 punti)

Data

$$f(x) = \frac{e^{2x} - \cos(x) - \sin(2x)}{\log(1+\sin(x)) - x},$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

sfruttando gli sviluppi. Usare il risultato per dire se l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{1} f(x)$$

converge.

$$f(x) \sim \frac{\left(1+2x+\frac{4x^2}{2}\right) - \left(1-\frac{x^2}{2}\right) - (2x)}{\sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} - x} \sim$$

$$\sim \frac{5x^2/2}{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2 - x} \sim$$

$$\sim \frac{5x^2/2}{-x^2/2} = -5 \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -5$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

IN $x=0$ SI HA UNA DISCONTINUITÀ.

È DI III SPECIE.
QUINDI
L'INTEGRALE
CONVERGE

MATRICOLA NOME E COGNOME

Esercizio 4 (2+3 punti)

Dire se esiste finito

$$\int_0^\infty \frac{(\sinh(x))^{\frac{1}{2}}}{e^{4x}-1}\,dx.$$

Determinare quindi per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste finito

$$\int_0^\infty \frac{(\sinh(x))^{\alpha}}{e^{4x}-1}\,dx.$$

Si ricorda che $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^\alpha}{e^{4x}-1}$$

in $x=0$ $\quad f(x) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \frac{(2x)^\alpha}{4x} = \frac{1}{4}x^{\alpha-1}$

[se $\alpha-1>0$ si ha una discontinuità di III specie integrabile]

converge per $-1 < \alpha - 1$

$\alpha > 0$

in $x \to \infty$ $\quad f(x) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \frac{e^{\alpha x}}{e^{4x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{(\alpha-4)x}$

converge per $\alpha - 4 < 0$

$\alpha < 4$

Quindi ① per $\alpha = \frac{1}{2}$ converge

② esiste finito per $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < 4 \end{cases} \to 0 < \alpha < 4$

Esercizio aggiuntivo 5 (3 punti)

(i 3 punti NON sono validi per la soglia, l'esercizio viene corretto solo se si raggiungono gli 8 punti soglia con gli altri)

Sia $\{a_n\}$ una successione positiva tale che $\sum_0^{+\infty} a_n$ converga si consideri la successione $\{b_n\}$ definita da $b_n = \alpha\sqrt{a_n} + \beta a_n^2$.

- Per quali valori di α e β in $\mathbb{R}$ si puo' garantire che $\sum_0^{+\infty} b_n$ converge?
- Per quali valori di α e β in $\mathbb{R}$ $\sum_0^{+\infty} b_n$ non converge?

Giustificare le risposte.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE

QUINDI $a_n \to 0$ E TENDE A ZERO ABBASTANZA RAPIDAMENTE.

TUTTO CIÒ CHE CONVERGE PIÙ RAPIDAMENTE A ZERO HA UNA SERIE CONVERGENTE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ CONVERGE SICURAMENTE

$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ POTREBBE NON CONVERGERE

(CONVERGE O DIVERGE IN BASE ALLA SPECIFICA a_n)

DA QUI SI RICAVANO LE RISPOSTE.