Politecnico di Milano **Analisi Matematica 1** Anno Accademico 2017-2018 Prof. Ettore Lanzarone	Prima prova in itinere 15 novembre 2017
NOME__________ COGNOME__________ MATRICOLA__________	

Parte A: punteggio 6/30; soglia minima per passare la prova 2/30 (ogni risposta giusta ad un quesito vale 1 punto, ogni risposta errata vale -0.25 punti, ogni risposta in bianco vale 0 punti)
Parte B: punteggio 17/30; soglia minima per passare la prova 8/30
Parte T: punteggio 10/30: soglia minima per passare la prova 4/30

Voto complessivo minimo per passare la prova 18/30. Tempo a disposizione 2.5 ore. Non si ritirano fogli di brutta: consegnare soltanto questo plico costituito da 6 fogli. Scrivere nome, cognome e matricola su ogni foglio nello spazio apposito; intestazioni in bianco annullano la prova. Chi viene sorpreso a copiare, parlare o consultare materiale verrà espulso e la prova annullata.

PARTE A

Quesito 1 (1/0/-0.25 punti)

Le soluzioni dell'equazione $|z - i| = |z - 1|$ nel piano di Gauss sono rappresentate da:

- ☐ una circonferenza con centro nell'origine
- X la bisettrice del I e III quadrante *[NOTA: luogo dei punti equidistanti da $(1, 0)$ e $(0, i)$]*
- ☐ la bisettrice del II e IV quadrante
- ☐ una circonferenza all'interno del I quadrante

Quesito 2 (1/0/-0.25 punti)

La funzione $f(x) = \frac{x}{x}$ nell'origine $x = 0$:

- ☐ è derivabile e la sua derivata $f'(0)$ vale 0
- ☐ è derivabile e la sua derivata $f'(0)$ vale 1
- ☐ è continua ma non derivabile
- X è discontinua *[NOTA: per forza discontinua, $x = 0$ non appartiene al dominio]*

Quesito 3 (1/0/-0.25 punti)

La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- X è monotona crescente e superiormente limitata, quindi convergente *[NOTA: vedi teorema]*
- ☐ è monotona crescente e superiormente limitata, quindi divergente
- ☐ è monotona decrescente e inferiormente limitata, quindi convergente
- ☐ è monotona decrescente e inferiormente limitata, quindi divergente

Quesito 4 (1/0/-0.25 punti)

L'equazione nel campo complesso $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$

- X ha 4 soluzioni, ciascuna con molteplicità 2 *[NOTA: soluzioni: $z = i$, $z = i$, $z = -i$, $z = -i$]*
- ☐ ha 4 soluzioni distinte
- ☐ non ha soluzioni
- X nessuna delle precedenti *[NOTA: la prima è ambigua; viene accettata anche questa come corretta]*

Quesito 5 (1/0/-0.25 punti)

Se $\forall a \in A,\ p(a) \Rightarrow p(b)$, allora

- ☐ $\forall a \in A,$ non $p(a) \Rightarrow$ non $p(b)$
- ☐ $\forall a \in A,\ p(b) \Rightarrow p(a)$
- X $\forall a \in A,$ non $p(b) \Rightarrow$ non $p(a)$ *[NOTA: controinversa]*
- ☐ $\forall a \in A,$ non $p(a) \Rightarrow p(b)$

Quesito 6 (1/0/-0.25 punti)

$o(x^4) + o(x^5)$ è pari a

- ☐ $o(x^5) + o(x^6)$
- ☐ $o(x^9)$
- X $o(x^4) + o(x^6)$ *[NOTA: sono entrambi $o(x^4)$]*
- ☐ $o(x^{20})$

PARTE B

Esercizio 1 (5 punti)

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\left(e^{3x}-1\right)^2 - 6x^6}{\ln^2(1+\sqrt{3}\sin^2 x) + x^5}$$

Si utilizzano gli asintotici:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\left(e^{3x}-1\right)^2 - 6x^6}{\ln^2(1+\sqrt{3}\sin^2 x) + x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(3x)^2 - 6x^6}{\ln^2(1+\sqrt{3}x^2) + x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^4 - 6x^6}{(\sqrt{3}x^2)^2 + x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9x^4 - 6x^6}{3x^4 + x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^4}{3x^4} = 3$$

Esercizio 2 (1+2+1+2 punti)

Assegnata la funzione

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

determinarne:

- i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti
- i punti di discontinuità e di non derivabilità (se presenti)
- gli estremi locali e globali
- il grafico qualitativo

Limiti e continuità:
Il dominio è tutto l'asse reale e la funzione è continua in tutto il dominio.
I limiti ai bordi del dominio sono:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad$ e $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Asintoti: separatamente per $x \to \pm\infty$ ci potrebbe essere un asintoto obliquo della forma $y = mx + q$.
Si noti subito che $f(x) \sim 5x$ per $x \to \pm\infty$, da cui $m = 5$.
Inoltre $f(x) - x = 5\sqrt[3]{x^3 - x^2} - 5x = 5x\left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right] \sim 5x\left(1 - \frac{1}{3x} - 1\right) = -\frac{5}{3}$ per $x \to \pm\infty$.
Quindi $q = -\frac{5}{3}$.
$y = 5x - \frac{5}{3}$ è asintoto obliquo di f sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

Derivata prima e derivabilità:

$$f'(x) = \frac{5}{3}\left(x^3 - x^2\right)^{-2/3}(3x^2 - 2x) = \frac{5x^{-1/3}}{3}(x-1)^{-2/3}(3x-2).$$

I punti $x = 0$ e $x = 1$ sono gli unici punti non derivabili.

Estremi: abbiamo quindi che

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \iff x < 0,\ x > \frac{2}{3}\ (x \neq 1) \\ f'(x) = 0 & \iff x = \frac{2}{3}, \\ f'(x) < 0 & \iff 0 < x < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Inoltre, dai limiti $\quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty \quad$ e $\quad \lim_{x\to -^+} f'(x) = +\infty$,
deduciamo che

- $x = \frac{2}{3}$ è punto di massimo locale di f,
- $x = 0$ è punto di natura cuspidale e punto di minimo locale di f.

Non sono presenti altri estremanti.

Esercizio 3 (3+3 punti)

a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2\,, \quad 0 \le \mathrm{Arg}(z) \le \frac{\pi}{3}\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} : w = iz + 1, \quad z \in A\}\,.$$

b) Determinare le soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z - 1 + i)^3 = i$$

e scriverne le soluzioni in forma algebrica.

Insieme A:
porzione del cerchio con centro in $(0, 0)$ e raggio 2. In particolare, è la regione con raggio compreso tra 1 e 2, e angolo compreso tra 0 e $\frac{\pi}{3}$.

Insieme V: il coefficiente i che moltiplica z puo' essere riscritto in forma trigonometrica come:

$$1\left(cos\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right);$$

quindi per ottenere B, A ruota di $+\frac{\pi}{2}$ attorno all'origine. Quindi diventa la regione con raggio compreso tra 1 e 2, e angolo compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{6}$.
Sommando infine 1, l'insieme B e' una porzione del cerchio traslato, con centro in $(1, 0)$.

Sostituzione $w = z - 1 + i$.

$$w^3 = i \Rightarrow w = \sqrt[3]{i} \Rightarrow w = \sqrt[3]{1\left(cos\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right)}$$

Quindi:

$$w_1 = 1\left(cos\frac{\pi}{6} + icos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = 1\left(cos\frac{5\pi}{6} + icos\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_3 = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + icos\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Infine:

$$z_1 = w_1 + 1 - i = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = w_2 + 1 - i = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\frac{1}{2}$$

$$z_3 = w_3 + 1 - i = 1 - 2i$$

PARTE T

Domanda 1 (5 punti)

Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri.

Vedi libro.

Domanda 2 (2.5 punti)

Dare la definzione di derivata $f'(x_0)$ per la funzione $f(x)$ in $x = x_0$.

Limite del rapporto incrementale SE ESISTE FINITO.

Domanda 3 (2.5 punti)

Enunciare il Teorema di Fermat (senza dimostrazione) e fornire un esempio di punto stazionario che non sia di massimo o di minimo.

Per il teorema vedi libro. Il punto è un flesso a tangente orizzontale. Come esempio $y = x^3$ in $x = 0$ (o esempi equivalenti).