Analisi e geometria 1	
prof.LANZARONE - Esercitazione	31/10/18

Ripasso in preparazione alla prima prova in itinere

Esercizio 1 Si consideri l'equazione nella variazione complessa z:

$$z^2 = -4\overline{z} \qquad (*)$$

- Determinare le soluzioni di (*) e rappresentarle nel campo complesso.
- Descrivere l'insieme $S = \{w \in C : w^2 = z \quad \text{con} \quad \text{z} \quad \text{soluzione} \quad \text{di}(*)|\text{Re(z)} > 0\}$.

Esercizio 2 Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni dell'equazione

$$z|z|^2 + 2i\overline{z} = 0.$$

Determinare e disegnare nel piano di Gauss gli insiemi: $B = \{w \in \mathbb{C} : w = \frac{z}{1-i} \quad z \in A\}$, $D = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < 2 \quad z \in A\}$, $E = \{z \in A : Re(z) \geq Im(z)\}$.

Esercizio 3 Data

$$f(x) = \frac{[\sqrt[5]{1 - \frac{1}{2}x} - 1]\ln(1 + 9x^2)}{1 - \cos\sqrt{3x}}$$

calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$. Considerare quindi il prolungamento con continuità $f^*(x)$ di $f(x)$, mostrare che la retta $y = 0$ è la retta tangente a $f^*(x)$ e disegnare l'andamento locale di $f^*(x)$ per $x \to 0$.

Esercizio 4 Data la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{-x-9}{x-1}}$$

- determinare gli eventuali asintoti
- determinare i punti di derivabilità e la derivata prima $f'(x)$
- studiarne la monotonia e gli estremi locali
- disegnarne il grafico
- determinare l'immagine della semiretta $C := (1, +\infty)$.

Esercizio 5 Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = x - \frac{2}{3}\ln(1 + x^3)$$

- determinare il campo di esistenza di f;
- determinare gli eventuali asintoti di f;

- determinare i punti di massimo locale e minimo locale di f;
- disegnare il grafico qualitativo di f;
- scrivere lo sviluppo di MacLaurin di f di ordine 6.

Esercizio 6 Dopo aver disegnato sul piano di Gauss il luogo dei punti A e il luogo dei punti B

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - i| = |z|\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 0\}$$

risolvere il sistema:

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = |z| \\ \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 0 \end{cases} .$$

Detta z_0 la soluzione del sistema, determinare

$$z_1 = 1 + i + z_0$$

$$z_2 = (1 + i)z_0$$

e disegnare sul piano di Gauss i punti z_1 e z_2.

Esercizio 7 Si consideri la seguente equazione nella variabile complessa z:

$$(z + 1)^6 = (1 + i\sqrt{3})^3 \qquad (*).$$

a) Determinare le soluzioni di (*) e rappresentarle sul piano complesso.

b) Descrivere l'insieme $S = \{w = z^{-1} : zsoluzionedi(*)conRe(z) > 0\}$ e rappresentarlo nel piano complesso.

Esercizio 8 Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{2}{x}}$$

- determinare l'insieme di definizioni D e gli eventuali asintoti di f;
- calcolare la derivata prima di f. Determinare gli insiemi di monotonia ed i punti di estremo relativo di f;
- calcolare la derivata seconda di f. Determinare gli insiemi di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso;
- determinare $Im(f)$ e calcolare $Sup_D(f)$, $Inf_D(f)$ specificando se si tratti di massimo e di minimo assoluto, rispettivamente;
- stabilire se f ristretta a $(2, +\infty)$ è invertibile, e se lo è f ristretta a $[-2, 0]$;
- tracciare il grafico di f.

Esercizio 9 Data la funzione

$$f(x) = \log(|\ \frac{x+2}{x}\ |)$$

- determinare l'insieme di definizioni D e gli eventuali asintoti di f;
- calcolare la derivata prima di f. Determinare gli insiemi di monotonia ed i punti di estremo relativo di f;
- calcolare la derivata seconda di f. Determinare gli insiemi di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso;
- determinare $Im(f)$ e calcolare $Sup_D(f)$, $Inf_D(f)$ specificando se si tratti di massimo e di minimo assoluto, rispettivamente;
- stabilire se f ristretta a $(0, +\infty)$ è invertibile;
- tracciare il grafico di f.