ESERCITAZIONE 4 - ②

1. Determinare campo di esistenza e immagine di $y = \frac{2+x}{x-3}$

$[D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$; $I = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)]$

2. Scrivere esplicitamente la funzione inversa della seguente funzione $f(x) = \frac{3+2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ precisando quale sia l'immagine.

$\left[x = \left(\frac{2y-3}{2+y} \right)^2 \right.$; $\left. I = (-\infty, -2) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right) \right]$

3. Stabilire se la funzione $f(x) = x^2 + 2x - 3$ e' invertibile nel dominio $D_f = [0, 3]$; calcolare l'espressione della funzione inversa, specificandone dominio e immagine. Disegnare $f(x)$ e $f^{-1}(x)$

[$f(x)$ e' invertibile ; $f^{-1}(x) = \sqrt{4+x} - 1$]

4. Verificare che la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 9$ non e' invertibile. Individuare opportune restrizioni di f che siano invertibili e scrivere l'espressione delle loro inverse.

[$f_1 = f|_{(-\infty, 2)} : (-\infty, 2) \to (5, +\infty)$

$f_2 = f|_{[2, +\infty)} : [2, +\infty) \to [5, +\infty)$

$f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-5}$

$f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-5}$]

5. Dimostrare che $f(x) = e^{2x} + 4e^x$ e' invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare esplicitamente la funzione inversa e il suo dominio.

[$f(x)$ e' iniettiva e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$.

$f^{-1}(x) = \log(\sqrt{4+x} - 2)$

$D = \mathbb{R}^+$]

ESERCITAZIONE 4 - b

6 Data la funzione $f(x) = \log_2\left[\frac{\pi}{3} - \arccos(3^x - 2)\right]$, calcolare il dominio e l'immagine di $f(x)$.
Dimostrare che $f(x)$ e' invertibile e calcolare l'inversa.

[$D: \left(\log_3\left(\frac{5}{3}\right), 1\right]$; $f(x)$ e' iniettiva e dunque invertibile
$I: \left(-\infty, \log_2\frac{\pi}{3}\right)$; $f^{-1}(x) = \log_3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2^x\right) + 2\right]$]

7 Date $f(x) = x+3$ e $g(x) = \sqrt{x}$ determinare la funzione composta $g \circ f$
[$g \circ f = \sqrt{x+3}$ $\quad [-3, +\infty)$]

8 Date $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ e $g(x) = e^x - 1$ determinare $g \circ f$
[$g \circ f = e^{\sqrt{x^2-1}} - 1$ $\quad (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$]

9 Determinare e rappresentare, se esistono, le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ delle due funzioni:
$$f(x) = e^{|x|} - 2 \qquad e \qquad g(x) = |\ln(x+2)|$$
[$g \circ f = |x|$; $f \circ g = \begin{cases} x & \text{per } x \geq -1 \\ -\dfrac{2x+3}{x+2} & \text{per } -2 < x < -1 \end{cases}$]

10 Provare che le funzioni $f(x) = x^2 - x + 1$ con $x \geq \frac{1}{2}$ e $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$ con $x \geq \frac{3}{4}$ sono una l'inversa dell'altra

11 Siano $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = \ln(x)$.
a. Determinare il dominio di $f(x)$ e di $g(x)$
b. Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione

[a. $D_{f(x)} = [-1; 1]$ $\quad D_{g(x)} = (0, +\infty)$
b. $f \circ g = \ln(x) - \sqrt{1 - (\ln x)^2}$ $\quad D_{f \circ g} = \left[\frac{1}{e}, e\right]$
$g \circ f = \ln\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)$ $\quad D_{g \circ f} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$]

12 Disegnare i seguenti grafici elementari:
a. $y = e^x + 1$ $\quad$ b. $y = \log(x+1)$ $\quad$ c. $y = \frac{1}{2}\cos x$ $\quad$ d. $y = \sin 3x$
e. $y = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$ $\quad$ f. $y = |\log|x-1||$ $\quad$ g. $y = 3\sin(x+2)$ $\quad$ h. $y = \left|3\sqrt{2-|x|} - 2\right|$