Analisi e geometria 1	
prof. LANZARONE - Esercitazione	28/09/2018

Principio di induzione

Esercizio 1 Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari é uguale a n^2.

Esercizio 2 Dimostrare, facendo uso del principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha: $2^n > n$.

Esercizio 3 Dimostrare con il principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero $n^2 + n$ é pari.

Esercizio 4 Si dimostri che:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 5 Dimostrare utilizzando il principio di induzione che

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} ..... + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^n}).$$

Esercizio 6 Facendo uso del principio di induzione dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2.$$

Esercizio 7 Dimostrare che il numero $n^3 + 6n^2 + 8n$ é divisibile per 3 per ogni valore di n.

Esercizio 8 Dimostrare che il numero $n^3 + 5n$ é divisibile per 6 per ogni valore di n.

Esercizio 9 Dimostrare utilizzando il principio di induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Esercizio 10 Dimostrare utilizzando il principio di induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Esercizio 11 Dimostrare utilizzando il principio di induzione che

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Esercizio 12 Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, la somma dei termini relativi alla seguente relazione vale:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Esercizio 13 Dimostrare che n rette che non siano a due a due parallele e che non siano a tre a tre secanti nello stesso punto, dividono il piano in un numero di regioni definito da:

$$N_{reg}=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Esercizio 14 Premesso che per quattro punti del piano, di cui tre non siano mai allineati, passano 6 rette distinte, allora nel caso di n punti le rette sono date dalla relazione

$$n_g=n(n-1)\frac{1}{2}.$$

Esercizio 15 Dimostrare che per ogni $n>2$ è vera la disuguaglianza $n^2>2n+1$. Quindi utilizzare il risultato ottenuto, per dimostrare che per ogni $n>4$ è vera la disuguaglianza $2^n>n^2$.

Esercizio 16 Dimostrare che per ogni valore di $x \neq 1$ e $\forall h \in \mathbb{R}$ vale:

$$\sum_{h=0}^{n} x^h=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Esercizio 17 Dimostrare mediante il principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!)=(n+1)!-1.$$

Estremo superiore, inferiore, massimo e minimo di un insieme numerico.

Esercizio 18 Calcolare Sup, Inf, max e min dei seguenti insiemi numerici:

a) $A=\{x=\frac{2n}{n^2+1}, n\in\mathbb{N}\}$;

b) $B=\{x=n+\frac{2}{n}, n\in\mathbb{N}_0\}$