Analisi e Geometria 1 Secondo compito in itinere 22 Gennaio 2018 Compito A	Docente: LANZARONE	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Domanda di teoria. (4 punti)

Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del Calcolo Integrale. Utilizzando il teorema fondamentale, dedurre la formula fondamentale del Calcolo Integrale.

Analisi e Geometria 1 Primo compito in itinere 22 Gennaio 2017 Compito A	Docente: LANZARONE	Numero di iscrizione all'appello:
Cognome:	Nome:	Matricola:

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es.1: 5 = 3 + 2; Es.2: 7 = 3 + 1 + 3.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$(*)\qquad \begin{cases} y'(t) + \dfrac{t}{1+t^2} y(t) = 3t, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

a. Determinare la soluzione $y(t)$ di $(*)$, specificandone il dominio.

b. Discutere la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y(t)} dt.$$

Soluzione

a. Notiamo subito che il problema $(*)$ coinvolge un'equazione lineare del tipo $y' = ay + b$, con

$$a(t) = -\frac{t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad b(t) = 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poiché tali coefficienti sono continui su tutto $\mathbb{R}$, la soluzione y di $(*)$ esiste ed è unica su $\mathbb{R}$, ed è rappresentata dalla formula

$$y(t) = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \left[2 + \int_0^t b(\tau) e^{-\int_0^\tau a(\sigma)d\sigma} d\tau \right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notiamo subito che

$$\int_0^t a(\tau)d\tau = -\int_0^t \frac{t}{1+\tau^2} d\tau = -\frac{1}{2} \left[\ln(1+\tau^2)\right]_0^t = -\frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right),$$

da cui, tornando alla formula generale, deduciamo

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)} \left[2 + 3\int_0^t \tau e^{\frac{1}{2}\ln\left(1+\tau^2\right)} d\tau \right] = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left[2 + 3\int_0^t \tau\sqrt{1+\tau^2} d\tau \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left[2 + \left[(1+\tau^2)^{3/2} \right]_0^t \right] = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left[1 + (1+t^2)^{3/2} \right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. Dobbiamo giudicare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt, \quad \text{ove definiamo} \quad f(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(1+t^2)^{3/2}} \quad \text{su} \quad (0, +\infty).$$

Poiché il denominatore non ha zeri, l'integrale è da intendersi come generalizzato di *seconda specie* sull'intervallo illimitato $[0, +\infty)$. Notando che la funzione integranda è positiva, utilizziamo il criterio del confronto asintotico. Abbiamo quindi

$$f_\alpha(t) \sim \frac{\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2} \quad \text{per} \quad t \to +\infty.$$

Essendo la funzione t^{-2} integrabile a $+\infty$, deduciamo dunque che la stessa conclusione vale per f.

2. Si consideri la curva:

$$\vec{r}\,(t) = arctg\,(2t)\,\widehat{\imath} - 5\widehat{\jmath} + \frac{ln\left(1+4t^2\right)}{4}\widehat{k}$$

con $t \in (0, +\infty)$.

(a) Determinare la terna intrinseca $\vec{T}\,(t)$, $\vec{N}\,(t)$ e $\vec{B}\,(t)$ in $t = 0$.

(b) Determinare il piano osculatore in $t = 0$.

(c) Determinare curvatura, il raggio di curvatura e l'equazione del cerchio osculatore in $t = 0$.

Soluzione

a)
Si calcolano il vettore derivato e il suo modulo:

$$\vec{r}'\,(t) = \frac{2}{1+4t^2}\widehat{\imath} + \frac{2t}{1+4t^2}\widehat{k}$$

$$|\vec{r}'\,(t)| = \sqrt{\left(\frac{2}{1+4t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+4t^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+4t^2}}{1+4t^2}$$

Quindi:

$$\vec{T}\,(t) = \frac{\vec{r}'\,(t)}{|\vec{r}'\,(t)|} = \frac{2}{\sqrt{4+4t^2}}\widehat{\imath} + \frac{2t}{\sqrt{4+4t^2}}\widehat{k}$$

$$\vec{T}\,(0) = \widehat{\imath}$$

Si deriva nuovamente $\vec{T}$ e se ne calcola il modulo:

$$\vec{T}'\,(t) = -2\frac{1}{2}\frac{8t}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{\imath} + \frac{2\sqrt{4+4t^2} - 2t\frac{8t}{2\sqrt{4+4t^2}}}{4+4t^2}\widehat{k} =$$

$$= -\frac{8t}{(9+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{\imath} + \frac{8}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{k}$$

$$\left|\vec{T}'\,(t)\right| = \sqrt{\left(\frac{8t}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{8}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{64+64t^2}}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi:

$$\vec{N}\,(t) = \frac{\vec{T}'\,(t)}{\left|\vec{T}'\,(t)\right|} = -\frac{8t}{\sqrt{64+64t^2}}\widehat{\imath} + \frac{8}{\sqrt{64+64t^2}}\widehat{k}$$

$$\vec{N}\,(0) = \widehat{k}$$

Infine:

$$\vec{B}\,(0) = \vec{T}\,(0) \times \vec{N}\,(0) = -\widehat{\jmath}$$

b)
Il piano osculatore in $t = 0$ ha i coefficienti pari alle componenti di $\vec{B}\,(0)$. Quindi:

$$-y+d=0$$

$$y=d$$

Per trovare d si impone il passaggio per il punto. Quando $t=0$ le coordinate del punto sono date da:

$$\vec{r}\,(0)=arctg\,(0)\,\widehat{\imath}-5\widehat{\jmath}+\frac{ln\,(1)}{4}\widehat{k}=-5\widehat{\jmath}$$

Quindi il punto è $P(0,-5,0)$. Si trova quindi $d=-5$ e il piano osculare è:

$$z=-5$$

D'altra parte la curva è piana perché la componente y è fissata pari a -5.

c)

La curvatura è data da:

$$k\,(t)=\frac{\left|\vec{T}'\,(t)\right|}{\left|\vec{r}'\,(t)\right|}=\frac{\sqrt{64+64t^2}}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1+4t^2}{\sqrt{4+4t^2}}$$

Quindi:

$$k\,(0)=\frac{\sqrt{64}}{(4)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

Il raggio di curvatura è dato da:

$$\rho\,(0)=\frac{1}{k\,(0)}=2$$

Il cerchio osculatore giace nel piano $z=0$, ha raggio 2 e il centro ad una distanza 2 dal punto $P(0,-5,0)$ nella direzione e nel verso dato da $\vec{N}\,(0)=\widehat{\jmath}$. Quindi si trova in $P(0,-3,0)$.

L'equazione del cerchio osculatore è quindi:

$$\begin{cases} x^2+(y+3)^2+z^2=4 \\ z=0 \end{cases}$$