

1. Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{xe^{-x^2}}{1 - xe^{-x^2}}.$$

- Determinare l'insieme di definizione D di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- Determinare la derivata prima di f , gli insiemi di monotonia, i punti di estremo relativo.
- Tracciare il grafico qualitativo di f .
- Stabilire se f è integrabile (eventualmente in senso improprio) su tutto D .

SOLUZIONE

- (a) La funzione è definita per $xe^{-x^2} \neq 1$, ossia per $e^{x^2} \neq x$, e questa condizione è sempre verificata. Quindi $D = \mathbb{R}$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{-x^2}}{1 - xe^{-x^2}} = 0.$$

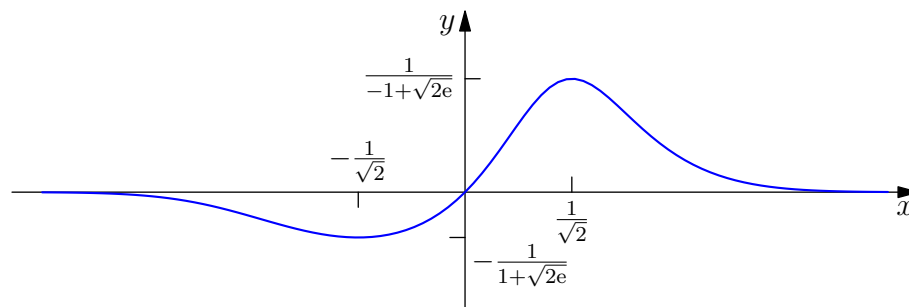
Pertanto, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \rightarrow \pm\infty$.

- (b) La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{(1 - 2x^2)e^{-x^2}}{(1 - xe^{-x^2})^2}.$$

Il segno di f' coincide con il segno di $1 - 2x^2$. Quindi $f'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, e $f'(x) < 0$ per $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Di conseguenza, la funzione f è strettamente crescente per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed è strettamente decrescente per $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Inoltre, possiede un punto di minimo (assoluto) in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{1+\sqrt{2}e})$ e possiede un punto di massimo (assoluto) in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{-1+\sqrt{2}e})$.

- (c) Il grafico di f è



- (d) Si tratta di stabilire il carattere dell'integrale improprio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{1 - xe^{-x^2}} dx.$$

Per fare questo, si deve stabilire l'integrabilità in senso improprio di f a $+\infty$ e a $-\infty$ (separatamente). La funzione f è continua su tutto \mathbb{R} ed positiva su $[1, +\infty)$ e negativa su $(-\infty, -1]$. Inoltre, si ha

$$f(x) \sim xe^{-x^2} \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty.$$

Poiché l'esponenziale e^{x^2} è un infinito di ordine superiore rispetto a ogni potenza x^α per $x \rightarrow \pm\infty$, ne segue che la funzione xe^{-x^2} è integrabile in senso improprio sia a $+\infty$ sia a $-\infty$. Di conseguenza, grazie al criterio del confronto asintotico, anche la funzione f è integrabile in senso improprio sia a $+\infty$ sia a $-\infty$, e quindi su tutto \mathbb{R} .

2. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine della funzione

$$f(x) = (1+x)e^x - (1-x)\cos x - x\sqrt[3]{1+x}.$$

SOLUZIONE

Poiché si hanno gli sviluppi di MacLaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x),$$

si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)e^x - (1-x)\cos x - x\sqrt[3]{1+x} \\ &= (1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - (1-x)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - x\left(1+\frac{x}{3}+o(x)\right) \\ &= 1+x+\frac{x^2}{2}+x+x^2+o(x^2) - \left(1-\frac{x^2}{2}-x+o(x^2)\right) - x-\frac{x^2}{3}+o(x^2) \\ &= 2x+\frac{5}{3}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

3. Determinare il parametro reale α in modo che le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} x = 3 - u \\ y = \alpha + u \\ z = 1 + u \end{cases}$$

siano incidenti in un punto P . Per i valori di α trovati, determinare l'equazione del piano π che contiene le rette r ed s .

SOLUZIONE

I vettori direttori delle rette r ed s sono rispettivamente $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$ e $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)$. Le due rette, quindi, non possono mai essere parallele. L'eventuale punto di intersezione si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} 1 + 3t = 3 - u \\ 3 - t = \alpha + u \\ 1 - 2t = 1 + u \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $u = -2t$. Sostituendo nella prima equazione, si ha $3t = 2 + 2t$, ossia $t = 2$. Quindi si ha $u = -4$ e, dalla seconda equazione, si ha $3 - 2 = \alpha - 4$, ossia $\alpha = 5$. Pertanto, per $\alpha = 5$, si ha il punto $P = r \cap s \equiv (7, 1, -3)$.

Il piano π che contiene le rette r ed s può essere visto come il piano passante per il punto P e avente direzione normale data dal vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (1, -1, 2)$. Pertanto, si ha

$$\pi : 1 \cdot (x - 7) - 1 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z + 3) = 0$$

ossia $\pi : x - y + 2z = 0$.

4. Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_{\gamma} x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, ds$$

dove

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

SOLUZIONE

Sia f la funzione vettoriale che dà la parametrizzazione di γ . Poiché

$$\begin{cases} x' = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y' = e^t \sin t + e^t \cos t \\ z' = e^t \end{cases} \quad t \in [0, \pi],$$

si ha $\|f'(t)\| = \sqrt{3} e^t$, e

$$I = \int_0^{\pi} x(t) \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \|f'(t)\| \, dt = \sqrt{6} \int_0^{\pi} e^{3t} \cos t \, dt.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int e^{3t} \cos t \, dt = e^{3t} \sin t - 3 \int e^{3t} \sin t \, dt = e^{3t} \sin t + 3e^{3t} \cos t - 9 \int e^{3t} \cos t \, dt$$

da cui si ha

$$\int e^{3t} \cos t \, dt = \frac{e^{3t}}{10} (\sin t + 3 \cos t) + c.$$

Pertanto, si ha

$$I = \sqrt{6} \left[\frac{e^{3t}}{10} (\sin t + 3 \cos t) \right]_0^{\pi} = -\frac{3}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} (e^{3\pi} + 1).$$