

<b>Analisi e Geometria 1</b> <b>Primo compito in itinere</b> <b>13 Novembre 2017      Compito A</b>	<b>Docente:</b> <b>LANZARONE</b>	
<b>Cognome:</b>	<b>Nome:</b>	<b>Matricola:</b>

**Prima parte - domande di teoria**

Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (3 punti)

Fornire un esempio di funzione che possiede un punto stazionario che non è di minimo né di massimo (1 punto)

Analisi e Geometria 1 Primo compito in itinere 13 Novembre 2017      Compito A	Docente: LANZARONE	
Cognome:	Nome:	Matricola:

Seconda parte - esercizi

Punteggi degli esercizi:    Es.1:  $4 = 2 + 2$ ;      Es.2:  $8 = 2 + 3 + 1 + 2$ .

**Istruzioni:** Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

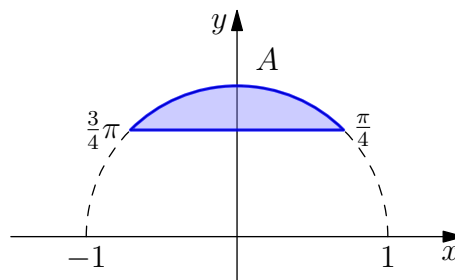
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{z}{i} \text{ con } z \in A \right\}.$$

- (b) Determinare gli insiemi

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left( z + \frac{1}{2}i \right)^3 = \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^3 \right\} \quad \text{e} \quad B \cap C.$$

SOLUZIONE

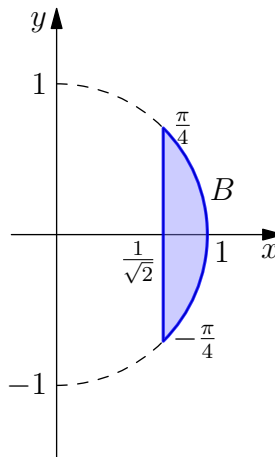
- (a) Nel piano di Gauss si ha



Poiché  $w_0 = \frac{1}{i} = -i$  è un numero complesso di modulo 1 e di argomento  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , l'insieme  $B = w_0 A$  si ottiene ruotando l'insieme  $A$  attorno all'origine di un angolo  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , in senso antiorario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

e, nel piano di Gauss, si ha



(b) Per determinare l'insieme  $C$  bisogna risolvere l'equazione

$$\left(z + \frac{1}{2}i\right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

Poiché

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i,$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z - \frac{1}{2}i\right)^3 = -i^3 = i.$$

Poiché le radici cubiche di  $i$  sono  $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  e  $-i$ , le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$\begin{array}{lll} z + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & \text{ossia} & z = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z + \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & \text{ossia} & z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z + \frac{1}{2}i = -i & \text{ossia} & z = -\frac{1}{2}i - i = -\frac{3}{2}i. \end{array}$$

Pertanto, si ha

$$C = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}i \right\}.$$

Infine, si ricava facilmente che

$$B \cap C = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := e^x \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{4}};$$

- (a) determinarne il dominio  $D$  e i limiti agli estremi del dominio;
- (b) determinarne gli estremi locali;
- (c) disegnarne il grafico qualitativo in base alle informazioni sopra determinate;
- (d) determinarne lo sviluppo di McLaurin al 2° ordine e poi il valore di  $f''(0)$ .

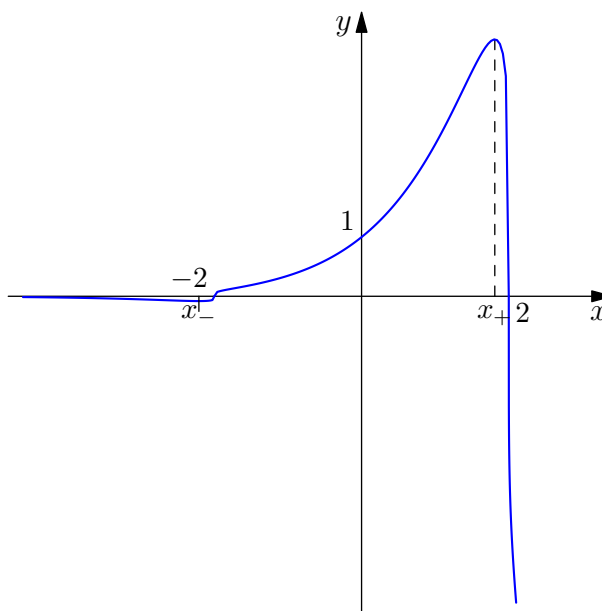
SOLUZIONE

- (a)  $D = \mathbb{R}$ ;  $\lim_{-\infty} f(x) = 0^-$ ,  $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$ ;
- (b)  $f$  e' derivabile in  $D' := (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ , poiche' ivi composta di funzioni derivabili, ove

$$f'(x) = \frac{e^x(-x^2 - \frac{2}{5}x + 4)}{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{e^x(x - x_-)(x_+ - x)}{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{4}{5}}} \quad x_{\pm} = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{101}}{5}$$

e  $x_- < -2 < 0 < x_+ < 2$ .  $f$  non e' derivabile in  $x = \pm 2$  poiche'  $\lim_{x \rightarrow \pm 2} f'(x) = \infty$ .  
 Quindi  $f$  ha Min loc. in  $x_-$  e Max loc. in  $x_+$ .

- (c) Il grafico della funzione è



- (d)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{20}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{1}{20}x^2 + o(x^2)\right) = 1 + x + \frac{9}{20}x^2 + o(x^2)$$

$$f''(0) = \frac{9}{10}.$$

<b>Analisi e Geometria 1</b> <b>Primo compito in itinere</b> <b>13 Novembre 2017      Compito B</b>	<b>Docente:</b> <b>LANZARONE</b>	
<b>Cognome:</b>	<b>Nome:</b>	<b>Matricola:</b>

**Prima parte - domande di teoria**

Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat (3 punti)

Fornire un esempio di funzione che possiede un punto stazionario che non è di minimo né di massimo (1 punto)

Analisi e Geometria 1 Primo compito in itinere 13 Novembre 2017      Compito B	Docente: LANZARONE	
Cognome:	Nome:	Matricola:

Seconda parte

Punteggi degli esercizi:    Es.1:  $4 = 2 + 2$ ;      Es.2:  $8 = 2 + 3 + 1 + 2$ .

**Istruzioni:** *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3, \operatorname{Im} z \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}$$

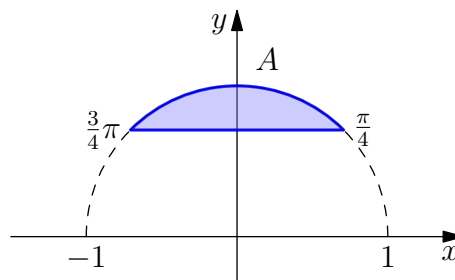
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{z}{i} \text{ con } z \in A \right\}.$$

- (b) Determinare gli insiemi

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left( z + \frac{3}{2}i \right)^3 = \left( 3 \frac{1-i}{1+i} \right)^3 \right\} \quad \text{e} \quad B \cap C.$$

SOLUZIONE

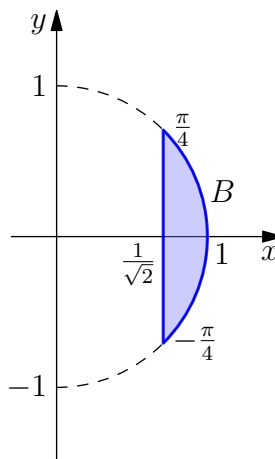
- (a) Nel piano di Gauss si ha



Poiché  $w_0 = \frac{1}{i} = -i$  è un numero complesso di modulo 1 e di argomento  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , l'insieme  $B = w_0 A$  si ottiene ruotando l'insieme  $A$  attorno all'origine di un angolo  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , in senso antiorario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3, \operatorname{Re} z \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}$$

e, nel piano di Gauss, si ha



(b) Per determinare l'insieme  $C$  bisogna risolvere l'equazione

$$\left(z + \frac{3}{2}i\right)^3 = \left(3\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

Poiché

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i,$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z - \frac{3}{2}i\right)^3 = -3^3 i^3 = 3^3 i.$$

Poiché le radici cubiche di  $i$  sono  $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  e  $-i$ , le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$\begin{array}{lll} z + \frac{3}{2}i = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i & \text{ossia} & z = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z + \frac{3}{2}i = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i & \text{ossia} & z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z + \frac{3}{2}i = -3i & \text{ossia} & z = -\frac{3}{2}i - 3i = -\frac{9}{2}i. \end{array}$$

Pertanto, si ha

$$C = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}i \right\}.$$

Infine, si ricava facilmente che

$$B \cap C = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := e^x \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{9}};$$

- (a) determinarne il dominio  $D$  e i limiti agli estremi del dominio;
- (b) determinarne gli estremi locali;
- (c) disegnarne il grafico qualitativo in base alle informazioni sopra determinate;
- (d) determinarne lo sviluppo di McLaurin al 2° ordine e poi il valore di  $f''(0)$ .

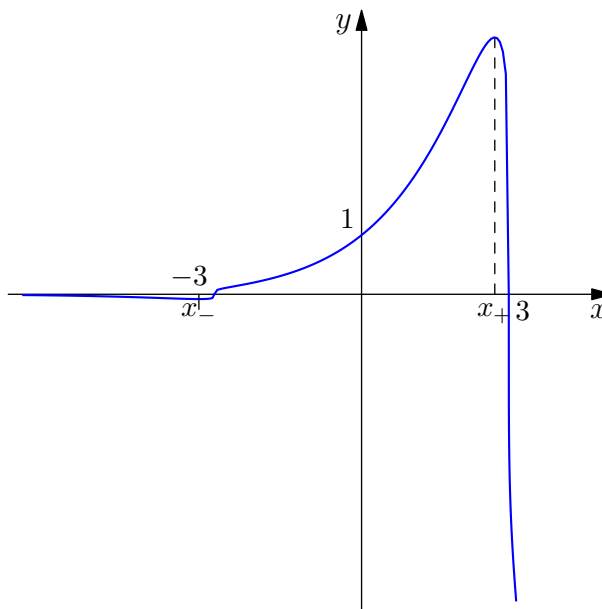
SOLUZIONE

- (a)  $D = \mathbb{R}$ ;  $\lim_{-\infty} f(x) = 0^-$ ,  $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$ ;
- (b)  $f$  e' derivabile in  $D' := (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ , poiche' ivi composta di funzioni derivabili, ove

$$f'(x) = \frac{e^x(-x^2 - \frac{2}{5}x + 9)}{9\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{e^x(x - x_-)(x_+ - x)}{9\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{4}{5}}} \quad x_{\pm} = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{226}}{5}$$

e  $x_- < -3 < 0 < x_+ < 3$ .  $f$  non e' derivabile in  $x = \pm 3$  poiche'  $\lim_{x \rightarrow \pm 3} f'(x) = \infty$ .  
 Quindi  $f$  ha Min loc. in  $x_-$  e Max loc. in  $x_+$ .

- (c) Il grafico della funzione è



- (d)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{45}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{1}{45}x^2 + o(x^2)\right) = 1 + x + \frac{43}{90}x^2 + o(x^2)$$

$$f''(0) = \frac{43}{45}.$$