| | | |
|---|---|---|
| **Analisi e Geometria 1**<br>**Quarto Appello**<br>**4 Settembre 2018 Compito A** | **Docente:**<br>**LANZARONE** | |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

**Prima parte: Teoria (punti 4+4).**

T.(a) Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per sostituzione.

T.(b) Enunciare e dimostrare la formula della distanza tra un punto e un piano.

**Seconda parte: Esercizi.**

**Punteggi degli esercizi: Es.1: 5 Es.2: 9 Es.3: 5 Es.4: 5**

**Istruzioni:** *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro.* **I fogli di brutta non devono essere consegnati**.

**Esercizio 1.**

Determinare e rappresentare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = \frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}$$

Detto $A$ l'insieme delle soluzioni trovate, rappresentare nel piano di Gauss l'insieme $B \subset \mathbb{C}$ dato da

$$B = \left\{ z = \frac{w}{2i}, w \in A \right\}$$

**Esercizio 2.**

Studiare la funzione $f(x) = \ln x - \arctan(x-1)$.

*(Riportare in tabella i risultati. Riportare concisamente i calcoli e il grafico sul retro del foglio.)*

| |
|---|
| **Dominio di** $f$: |
| **Limiti agli estremi**: |
| **Eventuali asintoti**: |
| **Derivata prima (formula e dominio)**: |
| **Studio del segno di** $f'$ **(max/min)**: |
| **Studio del segno di** $f$ **(zeri)**: |
| **Calcolare il polinimio di Taylor arrestato all'ordine 2 di** $f$ **nel punto** $x = 1$: |

**Esercizio 3.**

**a.** Studiare, al variare del parametro reale $\beta$, la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^\beta}\, dx.$$

**b.** Calcolare l'integrale per il valore $\beta = 1$.

**Esercizio 4.**

Dimostrare che la curva

$$\vec{r}(t) = t\,\hat{i} + \frac{1+t}{t}\hat{j} + \frac{1-t^2}{t}\hat{k} \qquad t \in [1,2]$$

è piana e trovare l'equazione del piano che la contiene.

Determinare inoltre la curvatura al variare di $t$.

**Seconda parte: Soluzione degli esercizi.**

**Esercizio 1.**

Determinare in forma algebrica e rappresentare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = \frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}$$

Detto $A$ l'insieme delle soluzioni trovate, rappresentare nel piano di Gauss l'insieme $B \subset \mathbb{C}$ dato da

$$B = \left\{ w = \frac{z}{2i}, z \in A \right\}$$

**Soluzione**

Si razionalizza e scrive in forma trigonometrica il secondo termine dell'equazione:

$$z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left( cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + icos\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

Quindi le 4 soluzioni sono:

$$z_1 = 1\left( cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + icos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1\left( cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + icos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_3 = 1\left( cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + icos\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = 1\left( cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + icos\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

Sono 4 punti su una circonferenza di raggio 1, ruotati ogni volta di $\pi/2$.

Per l'insieme $B$ la divisione per $2i$ ruota di $\pi/2$ in senso orario e poi dimezza il modulo. La rotazione porta le soluzioni nello stesso insieme di soluzioni; successivamente si dimezza il modulo. Quindi:

$$w_1 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{i}}{4}$$

$$w_3 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$w_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{i}}{4}$$

**Esercizio 2.**

Studiare la funzione $f(x) = \ln x - \arctan(x-1)$.

**Dominio di** $f$: $D(f) = (0, +\infty)$.

**Limiti agli estremi**: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Eventuali asintoti**:

$x = 0$ è asintoto verticale destro per $f$; poichè $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f$ non ammette asintoto obliquo.

**Derivata prima (formula e dominio)**:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x[1+(x-1)^2]} \quad D(f') = D(f) = (0, +\infty).$$

**Studio del segno di** $f'$ **(max/min)**:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \iff \quad 0 < x < 1 \text{ e } x > 2, \\ = 0 & \iff \quad x = 1 \text{ e } x = 2, \\ < 0 & \iff \quad 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \text{ è massimo locale per } f \\ x = 2 \text{ è minimo locale per } f \end{cases}$$

**Studio del segno di** $f$ **(zeri)**: dallo studio delle monotonie e dei limiti deduciamo che esiste $\alpha > 1$ t. c.

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \iff \quad x > \alpha, \\ = 0 & \iff \quad x = 1 \text{ e } x = \alpha, \\ < 0 & \iff \quad 0 < x < 1 \text{ e } 1 < x < \alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{ i punti } x = 1 \text{ e } x = \alpha \text{ sono zeri di } f$$

**Calcolare il polinimio di Taylor arrestato all'ordine 2 di** $f$ **nel punto** $x = 1$:

calcoliamo preliminarmente $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-2}{[1+(x-1)^2]^2}$, definita sul dominio $D(f'') = D(f) = (0, +\infty)$;

abbiamo quindi

$$T_{f,2,x=1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = -\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

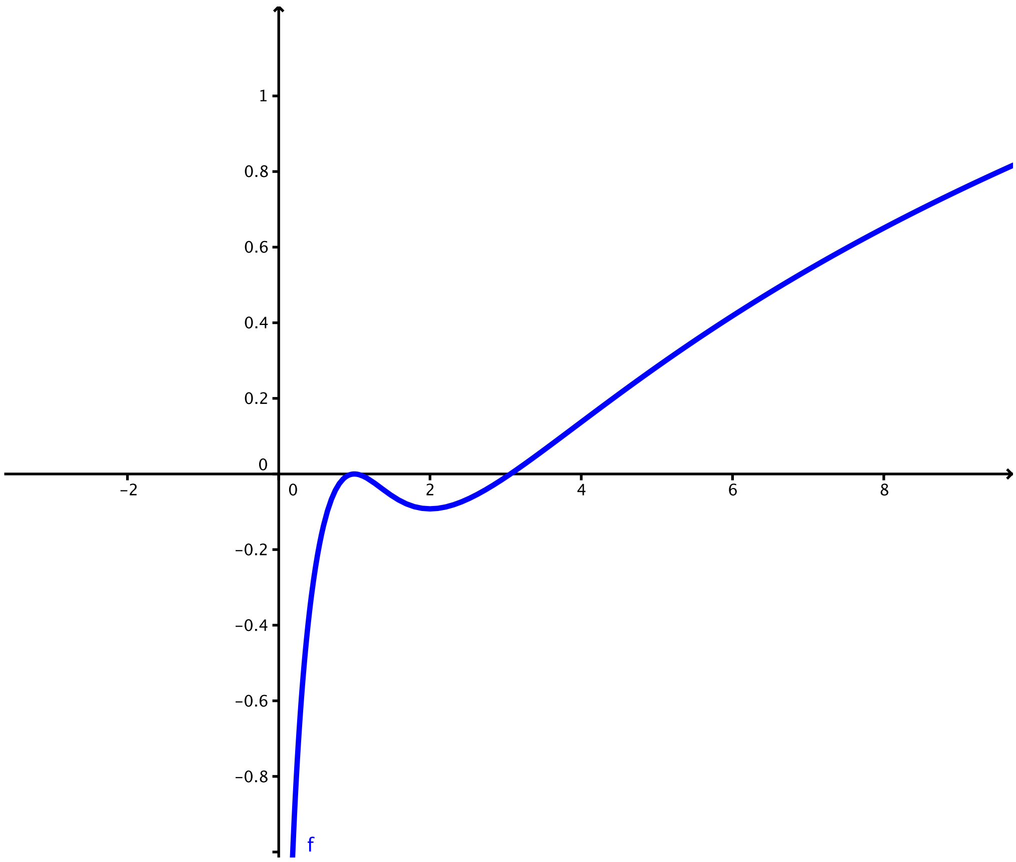

Figura 1: $f(x) = \ln x - \arctan(x-1)$

.

**Esercizio 3.**

**a.** Studiare, al variare del parametro reale $\beta$, la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^\beta} dx.$$

**b.** Calcolare l'integrale per il valore $\beta = 1$.

## Soluzioni

**a.** Si noti preliminarmente che la funzione integranda è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0, +\infty)$. Inoltre, non presenta singolarità per $x \to 0^+$. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico, ed è sufficiente studiare il comportamento della funzione integranda per $x \to +\infty$. Per $\beta > 0$ e per ogni $x > 0$ abbastanza grande si vede facilmente che

$$x^2 e^{-x^\beta} \leq \frac{1}{x^2},$$

e di conseguenza l'integrale converge ai sensi del criterio del confronto.

Per $\beta \leq 0$, abbiamo invece che

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^\beta} = +\infty,$$

e quindi l'integrale risulta divergente.

Riassumendo, tale integrale converge (nel senso delle II$^a$ specie) se, e solo se, $\beta > 0$.

**b.** Iterando due volte una integrazione per parti, si vede facilmente che

$$\int x^2 e^{-x} dx = e^{-x}(-2x^2 - 2x - 2) + c,$$

da cui abbiamo

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M x^2 e^{-x} dx = \lim_{M \to +\infty} \left[e^{-x}(-2x^2 - 2x - 2)\right]_0^M = 2 - \lim_{M \to +\infty} e^{-M}(2M^2 + 2M) = 2.$$

**Esercizio 4.**

Dimostrare che la curva

$$\vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + \frac{1+t}{t}\hat{\jmath} + \frac{1-t^2}{t}\hat{k} \qquad t \in [1,2]$$

è piana e trovare l'equazione del piano che la contiene.

Determinare inoltre la curvatura al variare di $t$.

**Soluzioni**

Si calcolano le quantità necessarie a fornire le risposte:

$$\vec{r}'(t) = \hat{\imath} - \frac{1}{t^2}\hat{\jmath} + \left(-1 - \frac{1}{t^2}\right)\hat{k}$$

$$\vec{r}''(t) = \frac{2}{t^3}\hat{\jmath} + \frac{2}{t^3}\hat{k}$$

$$\vec{r}'''(t) = -\frac{6}{t^4}\hat{\jmath} - \frac{6}{t^4}\hat{k}$$

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = +\frac{2}{t^3}\hat{\imath} - \frac{2}{t^3}\hat{\jmath} + \frac{2}{t^3}\hat{k}$$

$$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{2 + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4}}$$

$$||\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)|| = \frac{2\sqrt{3}}{t^3}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

La curva è piana perché il versore $B$ è costante.

Per il piano, i primi 3 coefficienti sono dati dalle componenti di $B$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z + d = 0$$

Per semplicità si riformula come:

$$x - y + z + \delta = 0$$

Per trovare $\delta$, le coordinate della curva per $t = 1$ sono $(1, 2, 0)$.

Sostituendole nell'equazione del piano di ottiene $\delta = 1$.

Quindi:

$$x - y + z + 1 = 0$$

Infine la curvatura vale:

$$k(t) = \frac{2\sqrt{3}}{t^3\sqrt{\left(2 + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4}\right)^3}}$$

| **Analisi e Geometria 1**<br>**Quarto Appello**<br>**4 Settembre 2018 Compito B** | **Docente:**<br>**LANZARONE** | |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

**Prima parte: Teoria (punti 4+4).**

T.(a) Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti.

T.(b) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

**Seconda parte: Esercizi.**

**Punteggi degli esercizi:** **Es.1: 5** **Es.2: 9** **Es.3: 5** **Es.4: 5**

**Istruzioni:** *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro.* **I fogli di brutta non devono essere consegnati**.

**Esercizio 1.**

Determinare in forma algebrica e rappresentare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = \frac{-1}{8 - 8i\sqrt{3}}$$

Detto $A$ l'insieme delle soluzioni trovate, rappresentare nel piano di Gauss l'insieme $B \subset \mathbb{C}$ dato da

$$B = \left\{ w = \frac{2z}{i}, z \in A \right\}$$

**Esercizio 2.**

Studiare la funzione $f(x) = \arctan x - \ln(x+1)$.

*(Riportare in tabella i risultati. Riportare concisamente i calcoli e il grafico sul retro del foglio.)*

| |
|---|
| **Dominio di** $f$: |
| **Limiti agli estremi**: |
| **Eventuali asintoti**: |
| **Derivata prima (formula e dominio)**: |
| **Studio del segno di** $f'$ **(max/min)**: |
| **Studio del segno di** $f$ **(zeri)**: |
| **Calcolare il polinimio di Taylor arrestato all'ordine 2 di** $f$ **nel punto** $x = 1$: |

**Esercizio 3.**

**a.** Studiare, al variare del parametro reale $\beta$, la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} x^\beta e^{-x^2}\,dx.$$

**b.** Calcolare l'integrale per il valore $\beta = 1$.

**Esercizio 4.**

Dimostrare che la curva

$$\vec{r}(t) = \frac{1-t^2}{t}\hat{\imath} - t\,\hat{\jmath} + \frac{1+t}{t}\hat{k} \qquad t \in [1,4]$$

è piana e trovare l'equazione del piano che la contiene.

Determinare inoltre la curvatura al variare di $t$.

**Seconda parte: Soluzione degli esercizi.**

**Esercizio 1.**

Determinare in forma algebrica e rappresentare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = \frac{-1}{8 - 8i\sqrt{3}}$$

Detto $A$ l'insieme delle soluzioni trovate, rappresentare nel piano di Gauss l'insieme $B \subset \mathbb{C}$ dato da

$$B = \left\{ w = \frac{2z}{i}, z \in A \right\}$$

**Soluzione**

Si razionalizza e scrive in forma trigonometrica il secondo termine dell'equazione:

$$z^4 = -\frac{1}{32} - i\frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{1}{16}\left( cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + icos\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

Quindi le 4 soluzioni sono:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left( cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + icos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left( cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + icos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\left( cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + icos\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$z_4 = \frac{1}{2}\left( cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + icos\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$$

Sono 4 punti su una circonferenza di raggio 1, ruotati ogni volta di $\pi/2$.

Per l'insieme $B$ la divisione per $i$ ruota di $\pi/2$ in senso orario e poi il prodotto per 2 raddoppia il modulo. La rotazione porta le soluzioni nello stesso insieme di soluzioni; successivamente si dimezza il modulo. Quindi:

$$w_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$w_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

**Esercizio 2.**

Studiare la funzione $f(x) = \arctan x - \ln(x+1)$.

**Dominio di** $f$: $D(f) = (-1 + \infty)$.

**Limiti agli estremi**: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**Eventuali asintoti**:

$x = -$ è asintoto verticale destro per $f$; poichè $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f$ non ammette asintoto obliquo.

**Derivata prima (formula e dominio)**:

$$f'(x) = -\frac{x(x-1)}{(x+1)(1+x^2)} \quad D(f') = D(f) = (-1, +\infty).$$

**Studio del segno di** $f'$ **(max/min)**:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 1, \\ = 0 & \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ e } x = 1, \\ < 0 & \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 0 \text{ e } x > 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \text{ è minimo locale per } f \\ x = 1 \text{ è massimo locale per } f \end{cases}$$

**Studio del segno di** $f$ **(zeri)**: dallo studio delle monotonie e dei limiti deduciamo che esiste $\alpha > 0$ t. c.

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 0 \text{ e } 0 < x < \alpha, \\ = 0 & \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ e } x = \alpha, \\ < 0 & \Longleftrightarrow \quad x > \alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{ i punti } x = 0 \text{ e } x = \alpha \text{ sono zeri di } f$$

**Calcolare il polinimio di Taylor-MacLaurin arrestato all'ordine 2 di** $f$ **nel punto** $x = 0$:

calcoliamo preliminarmente $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, definita sul dominio $D(f'') = D(f) = (-1, +\infty)$;

abbiamo quindi

$$T_{f,2,x=0}(x) = f(0) + f'(0)(x-1) + \frac{1}{2} f''(0)(x-1)^2 = \frac{1}{2} x^2.$$

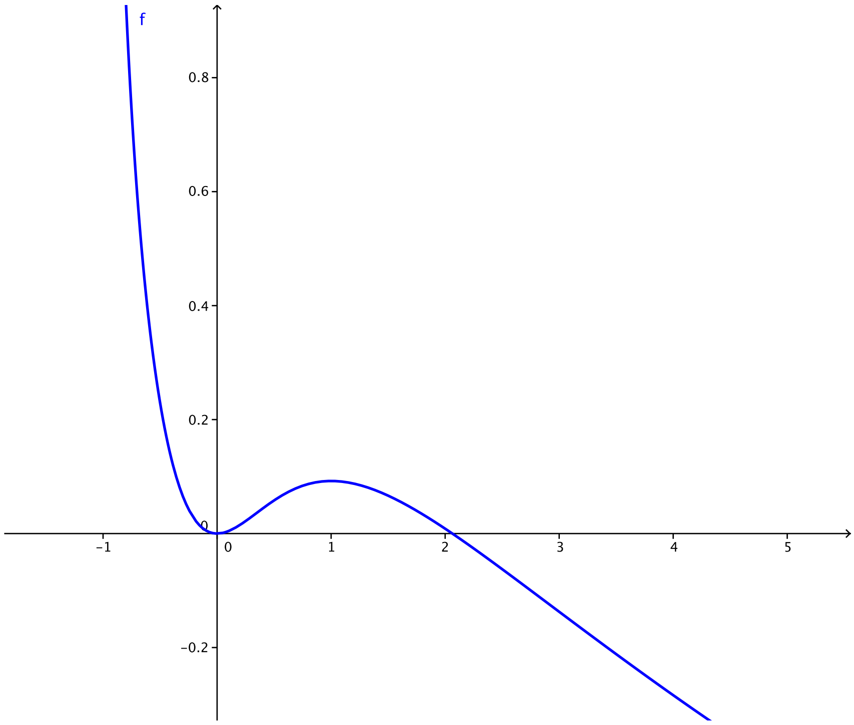


Figura 2: $f(x) = \arctan x - \ln(x + 1)$

.

**Esercizio 3.**

**a.** Studiare, al variare del parametro reale $\beta$, la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} x^\beta e^{-x^2} dx.$$

**b.** Calcolare l'integrale per il valore $\beta = 1$.

**Soluzioni**

**a.** Si noti preliminarmente che la funzione integranda $f_\beta$ è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0, +\infty)$. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Studiamo quindi il composramento della funzione integranda per

- $x \to 0^+$: abbiamo $f_\beta(x) \sim x^\beta$, integrabile per i valori $\beta > -1$;
- $x \to +\infty$: per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $x > 0$ abbastanza grande si vede facilemente che

  $$x^\beta e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

  e di conseguenza l'integrale converge ai sensi del criterio del confronto.

Riassumendo, tale integrale converge (nel senso delle III$^a$ specie) se, e solo se, $\beta > -1$.

**b.** Utilizzando la regola di integrale per sostituzione, si vede facilmente che

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

da cui abbiamo

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\left[\lim_{M\to+\infty} e^{-x^2}\right]_0^M = \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{M\to+\infty} e^{-M^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

**Esercizio 4.**

Dimostrare che la curva

$$\vec{r}(t) = \frac{1-t^2}{t}\hat{\imath} - t\,\hat{\jmath} + \frac{1+t}{t}\hat{k} \qquad t \in [1,4]$$

è piana e trovare l'equazione del piano che la contiene.

Determinare inoltre la curvatura al variare di $t$.

**Soluzioni**

Si calcolano le quantità necessarie a fornire le risposte:

$$\vec{r}'(t) = \left(-1 - \frac{1}{t^2}\right)\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \frac{1}{t^2}\hat{k}$$

$$\vec{r}''(t) = \frac{2}{t^3}\hat{\imath} + \frac{2}{t^3}\hat{k}$$

$$\vec{r}'''(t) = -\frac{6}{t^4}\hat{\imath} - \frac{6}{t^4}\hat{k}$$

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = +\frac{2}{t^3}\hat{\imath} - \frac{2}{t^3}\hat{\jmath} - \frac{2}{t^3}\hat{k}$$

$$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{2 + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4}}$$

$$||\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)|| = \frac{2\sqrt{3}}{t^3}$$

$$\vec{B}(t) = +\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

La curva è piana perché il versore $B$ è costante.

Per il piano, i primi 3 coefficienti sono dati dalle componenti di $B$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z + d = 0$$

Per semplicità si riformula come:

$$x - y - z + \delta = 0$$

Per trovare $\delta$, le coordinate della curva per $t = 1$ sono $(0, -1, 2)$.

Sostituendole nell'equazione del piano di ottiene $\delta = 1$.

Quindi:

$$x - y - z + 1 = 0$$

Infine la curvatura vale:

$$k(t) = \frac{2\sqrt{3}}{t^3\sqrt{\left(2 + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4}\right)^3}}$$