Analisi e Geometria 1 **Terzo appello** **4 settembre 2017 Compito A**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

a. Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri.
Mostrare con un esempio che il teorema può non valere se la funzione non è continua. (5 punti)

b. Dire come ricavare l'area di un parallelogrammo in $\mathbb{R}^2$ i cui vettori associati a 2 lati contigui sono $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.
Dire come ricavare il volume di un parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$ i cui vettori associati a 3 lati contigui sono $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$. (3 punti)

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Primo appello** **13 Febbraio 2017 Compito A**	**Docente:**	**Numero di iscrizione all'appello:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es.1: 5 ; Es.2: 7 ; Es.3: 6 ; Es.4: 6.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi devono essere svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Calcolare il seguente limite
per $\alpha = \frac{1}{4}$, per $\alpha = 1$ e per $\alpha = 2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}}.$$

Soluzione

Osserviamo che, per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{x^\alpha - \sinh x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \frac{x^\alpha - (x^\alpha - \frac{1}{3!}x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha})}{x^6 + x^{6\alpha^2}} \sim \frac{\frac{1}{6}x^{3\alpha}}{x^6 + x^{6\alpha^2}}.$$

Poniamo ora $g_\alpha(x) = x^6 + x^{6\alpha^2}$ e osserviamo che se $\alpha \in (0,1)$ allora

$$g_\alpha(x) \sim x^{6\alpha^2}.$$

Dunque risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha \in (0, 1/2] \\ \dfrac{1}{6}, & \alpha = 1/2 \\ +\infty, & \alpha \in (1/2, 1). \end{cases}$$

Se invece $\alpha \geq 1$ allora

$$g_\alpha(x) \sim x^6.$$

Pertanto avremo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \in [1, 2) \\ \dfrac{1}{6}, & \alpha = 2 \\ 0, & \alpha \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Da qui si ricavano i valori per i tre α richiesti.

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = x - \frac{2}{3}\ln(1+x^3)\,.$$

(a) Determinare il campo di esistenza di f.

(b) Determinare gli eventuali asintoti di f.

(c) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f.

(d) Disegnare il grafico qualitativo di f.

(e) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di f di ordine 6.

Soluzione

(a) i. La funzione f è definita per $1+x^3>0$, ossia per $x>-1$. Pertanto il campo di esistenza di f è $D=(-1,+\infty)$.

ii. La funzione f ha un asintoto verticale per $x\to(-1)^+$, essendo

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+}\left(x-\frac{2}{3}\ln(1+x^3)\right) = +\infty\,.$$

Inoltre, essendo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2}{3}\ln(1+x^3)\right) = +\infty\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3}\,\frac{\ln(1+x^3)}{x}\right) = 1\\
&\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{3}\ln(1+x^3) = -\infty
\end{aligned}$$

la funzione f non presenta né asintoto orizzontale né asintoto obliquo per $x\to+\infty$..

iii. La derivata prima di f è

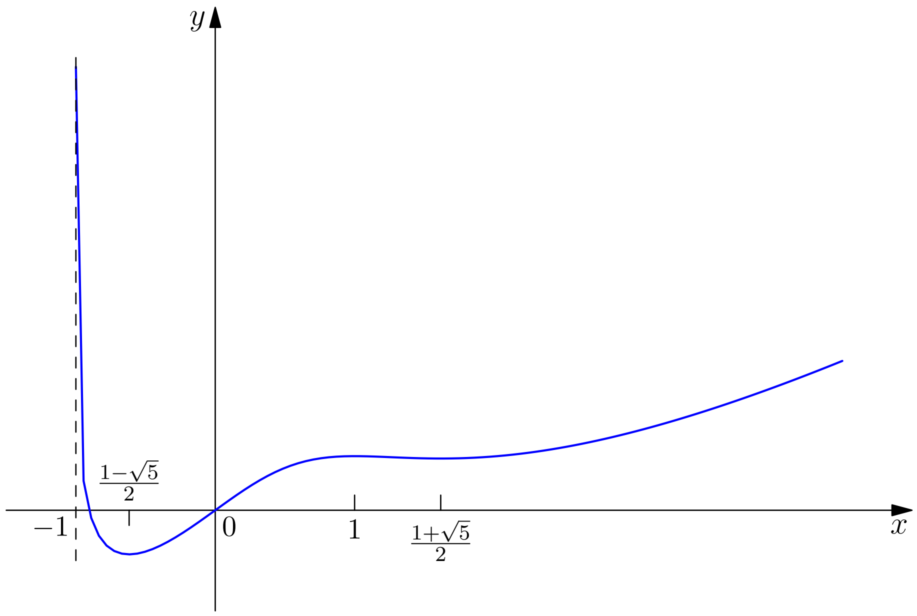
$$f'(x) = 1-\frac{2}{3}\,\frac{3x^2}{1+x^3} = \frac{x^3+2x^2+1}{1+x^3} = \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{1+x^3}$$

essendo

$$x^3+2x^2+1 = x^3+2x^2+x-x+1 = x(x-1)^2-(x-1) = (x-1)(x^2-x-1)\,.$$

Poiché $1+x^3>0$ su D, si ha $f'(x)\geq 0$ se e solo se $(x-1)(x^2-x-1)\geq 0$. Pertanto, la funzione f è decrescente per $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e per $1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ed è crescente per $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<1$ e per $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Di conseguenza, la funzione f presenta un punto di massimo locale per $x=0$, e un punto di minimo locale per $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

iv. Il grafico qualitativo di f è



(b) Usando lo sviluppo di MacLaurin della funzione logaritmo (tenuto conto del fatto che x^3 è una funzione infinitesima per $x \to 0$), lo sviluppo di MacLaurin di f di ordine 6 è

$$f(x) = x - \frac{2}{3}\ln(1+x^3) = x - \frac{2}{3}\left(x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\right) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)\,.$$

3. Dopo aver disegnato sul piano di Gauss il luogo dei punti A e il luogo dei punti B:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad |z + 1 - i| = |z| \right\},$$
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 0 \right\}.$$

risolvere il sistema:

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = |z| \\ \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 0\,. \end{cases}$$

Detta z_0 la soluzione del sistema, determinare:

$$z_1 = 1 + i + z_0$$

$$z_2 = (1 + i)z_0$$

e disegnare sul piano di Gauss i punti z_1 e z_2.

Soluzione:

A è il luogo dei punti equidistanti da $z = -1 + i$, cioé dal punto $(-1, 1)$, e da $z = 0$, cioé dal punto $(0, 0)$. Quindi è la retta $y = x + 1$ del piano di Gauss.

B è il luogo dei punti con parte reale e immaginaria di segno opposto, cioé la retta $y = -x$ del piano di Gauss.

La soluzione del sistema è data quindi dall'intersezione di queste due rette:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

I due punti z_1 e z_2 sono quindi:

$$z_1 = 1 + i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$z_2 = (1 + i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -1$$

4. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t + \sin t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]\,.$$

(a) Verificare che la curva γ è regolare.

(b) Determinare i versori della terna intrinseca di γ nel punto $P \equiv (1, 0, 1)$.

(c) Determinare la curvatura di γ nel punto P.

Soluzione

Iniziamo con l'osservare che si ha

$$\begin{cases} x' = 1 - \sin t \\ y' = 1 + \cos t \\ z' = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = -\cos t \\ y'' = -\sin t \\ z'' = 0\,. \end{cases}$$

(a) Poiché $z'(t) = 1 \neq 0$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, la curva γ è regolare.

(b) Si vede subito che il punto $P \equiv (1, 0, 1)$ appartiene a γ e che corrisponde al punto che si ottiene per $t = 0$. Inoltre, si ha $f'(0) = (1, 2, 1)$ e $f''(0) = (-1, 0, 0)$. Quindi

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 2)$$

e $\|f'(0) \wedge f''(0)\| = \sqrt{5}$. Si hanno così i versori

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(0,-1,2)}{\sqrt{5}}\,.$$

Infine, il versore normale è dato da

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-5,2,1)}{\sqrt{30}}\,.$$

(c) La curvatura e il raggio di curvatura di γ in P sono dati da

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}} \qquad \text{e} \qquad \rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\,.$$