Dom. 1	Dom 2	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello** **05 luglio 2017**	**Docente: Gianni Arioli**	**Numero Alfabetico:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prima parte

a. Enunciare e dimostrare la formula di Taylor con il resto nella forma di Peano. (5 punti)

b. Scrivere l'equazione parametrica di una retta in $\mathbb{R}^3$ perpendicolare al piano $x = 0$ e passante per il punto $P = (3, 1, 2)$. (3 punti)

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello** **05 luglio 2017**	**Docente: Gianni Arioli**	**Numero Alfabetico:**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Seconda parte

Punteggi degli esercizi: Es. 1: 5; Es. 2: 6=3+3; Es.3: 6=4+2; Es.4: 7=1+1+2+1+2.

Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^\alpha} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$.

Soluzione: Utilizzando lo sviluppo di Mac-Laurin della funzioni esponenziale e coseno:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^\alpha} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{12} x^{4-\alpha} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4, \\ \frac{1}{12} & \text{se } \alpha = 4, \\ \infty & \text{se } \alpha > 4\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi la funzione è continua per $\alpha < 4$.

2. Sia r la retta rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

e sia π il piano parallelo a r che passa per i punti $A \equiv (0,0,0)$ e $B \equiv (1,1,1)$.

(a) Determinare un'equazione del piano π.
(b) Determinare i punti giacenti sulla retta r e distanti 1 dal punto A.

Soluzione:

(a) In forma parametrica la retta r è definita da:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \end{cases}$$

Il piano π ha equazione:

$$ax+by+cz+d=0$$

Imponendo il passaggio per A e B si ottiene:

$$ax+by+(-a-b)z=0$$

Imponendo poi la condizione di perpendicolarità tra i parametri direttori di r e i coefficienti di π si ottiene:

$$0a+(-1)b+1(-a-b)=0 \quad \Rightarrow \quad a=-2b$$

Quindi:

$$-2bx+by+bz=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-y-z=0$$

(b) Intersecando la sfera $x^2+y^2+z^2=1$ con le equazioni parametriche della retta si ottiene:

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+t^2-1=0$$

da cui

$$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

e quindi i punti sono

$$P_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right), \qquad P_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right).$$

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -x^6 y^2 \\ y(0) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Trovare la soluzione y_β del problema (1) al variare di β, specificando qual è il suo più grande intervallo di definizione I_β.

(b) Stabilire se $\int_{I_\beta} y_\beta(x)dx$ esiste finito o meno al variare di β.

Soluzione

(a) L'equazione differenziale ordinaria è a variabili separabili. Dalla teoria (cfr. teorema di esistenza e unicità locale) sappiamo che, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, il problema (1) ha un'unica soluzione definita in un intervallo contenente $x = 0$. Nel caso $\beta = 0$ è facile vedere che la soluzione è $y_0(x) = 0$. Supponiamo dunque $\beta \neq 0$ e determiniamo la corrispondente soluzione di (1). Si noti che tale soluzione non si può annullare in un intorno di $x = 0$ per continuità. Avremo

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -2x^6.$$

Quindi

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)} dt = -2 \int_0^x t^6 dt$$

che fornisce

$$\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{7}x^7.$$

Pertanto

$$y_\beta(x) = \frac{1}{\frac{1}{\beta} + \frac{2}{7}x^7}.$$

Dobbiamo quindi imporre

$$\frac{1}{\beta} + \frac{2}{7}x^7 \neq 0$$

ovvero

$$x \neq x_0 = \sqrt[7]{-\frac{7}{2\beta}}.$$

Distingueremo dunque due casi.

$$I_\beta = \begin{cases} (x_0, +\infty) & \beta > 0 \\ (-\infty, x_0), & \beta < 0. \end{cases}$$

(b) Nel caso $\beta = 0$ la soluzione è banalmente integrabile su $\mathbb{R}$ e l'integrale vale 0. Se invece $\beta \neq 0$ allora y_β non è integrabile in un intorno sinistro (se $\beta > 0$) o destro (se $\beta < 0$) di x_0. Infatti, usando la formula di Taylor centrata in x_0, abbiamo

$$\frac{1}{\beta} + \frac{2}{7}x^7 \sim 2x_0^6(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Pertanto l'integrale improprio $\int_{I_\beta} y_\beta(x)dx$ non converge ad un valore finito se $\beta \neq 0$.

4. Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x - 6}}{|x|}.$$

Determinare:

- il dominio della funzione;
- il segno della funzione;
- i massimi e i minimi, specificando se si tratta di estremanti locali o globali;
- l'andamento asintotico della funzione per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Si disegni con le informazioni ricavate un grafico qualitativo della funzione.

Dal disegno ottenuto mostrare, senza fare calcoli, che la funzione presenta un numero dispari di punti di flesso tra $-\infty$ e il primo estremante (quello con la coordinata x minima).

Soluzione: Dominio: $x \neq 0$ e $x^2 - 5x - 6 \geq 0$, da cui $D = \{x \geq 6\} \cup \{x \leq -1\}$.

Segno: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$.

La derivata è $f'(x) = \text{segno}(x) \left(\frac{2x-5}{2x\sqrt{x^2-5x-6}} - \frac{\sqrt{x^2-5x-6}}{x^2} \right)$, quindi si annulla in $x = -\frac{12}{5}$, è positiva per $x \geq 6$ e $x < -\frac{12}{5}$. Il punto $\left(\frac{12}{5}, \sqrt{\frac{147}{72}}\right)$ è un massimo locale, i punti $(-1, 0)$ e $(6, 0)$ sono minimi globali.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, quindi la funzione ha asintoti orizzontali per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.