COMPITO A

a. Si enunci e dimostri il teorema della media integrale per funzioni continue. (5 punti)

b. Si scriva l'equazione di un piano generico, specificando qual è la direzione normale ad esso, e si scriva la condizione di perpendicolarità tra due piani. (3 punti)

Punteggi degli esercizi: Es.1: 7; Es.2: 7; Es.3: 10

Esercizio 1.
Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x}}{x^{2\alpha} \sqrt[3]{1+2x+x^2}} \, \mathrm{d}x$$

converge.

Soluzione. Poiché

$$\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x} = \frac{1+4x-1-x}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+x}} = \frac{3x}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+x}},$$

la funzione integranda

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x}}{x^{2\alpha} \sqrt[3]{1+2x+x^2}}$$

è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Si tratta quindi di studiare l'integrabilità di f in un intorno destro di 0 e in un intorno di $+\infty$.

Per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{3x}{2x^{2\alpha}} = \frac{3}{2} \frac{1}{x^{2\alpha-1}}.$$

La funzione $1/x^{2\alpha-1}$ è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ quando $2\alpha - 1 < 1$, ossia per $\alpha < 1$. Pertanto, applicando il criterio del confronto asintotico, anche la funzione f è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ per $\alpha < 1$.

Per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{3x}{3\sqrt{x}\, x^{2\alpha} \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{2\alpha+2/3-1/2}} = \frac{1}{x^{2\alpha+1/6}}.$$

La funzione $1/x^{2\alpha+1/6}$ è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ quando $2\alpha + \frac{1}{6} > 1$, ossia per $\alpha > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{6}) = \frac{5}{12}$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che anche la funzione f è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ per $\alpha > \frac{5}{12}$.

In conclusione, la funzione f è integrabile in senso improprio, e quindi l'integrale I è convergente, se e soltanto se

$$\frac{5}{12} < \alpha < 1.$$

Esercizio 2.
Data l'equazione differenziale

$$y' = 5y + \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-5t})^2}$$

a. determinarne le soluzioni (integrale generale);

b. una volta determinate le soluzioni, dire se ne esiste almeno soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non-omogenea con coefficienti continui definiti su tutto $\mathbb{R}$, pertanto tutte le sue soluzioni saranno definite su tutto $\mathbb{R}$.

a. Per determinare tutte le soluzioni possiamo fissare un conveniente dato iniziale arbitrario, per esempio $y(0) = y_0$ con $y_0 \in \mathbb{R}$. Osserviamo anzitutto che la soluzione dell'equazione omogenea è

$$\varphi_O(t) = \mathrm{e}^{5t} y_0$$

pertanto una soluzione particolare è data da

$$\varphi_P(t) = \mathrm{e}^{5t} \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-5s}}{(1+\mathrm{e}^{-5s})^2} ds.$$

Avremo quindi che l'integrale generale dell'equazione può essere espresso nel modo seguente

$$\varphi(t) = \varphi_O(t) + \varphi_P(t) = \mathrm{e}^{5t} \left(y_0 + \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-5s}}{(1+\mathrm{e}^{-5s})^2} ds \right).$$

Perciò

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{5t} \left(y_0 + \frac{1}{5} \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5s}} \right]_0^t \right) = \mathrm{e}^{5t} \left(y_0 - \frac{1}{10} + \frac{1}{5(1+\mathrm{e}^{-5t})} \right).$$

Posto dunque $c = y_0 - \frac{1}{10}$, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$\varphi_c(t) = \mathrm{e}^{5t} \left(c + \frac{1}{5(1+\mathrm{e}^{-5t})} \right).$$

b. Osserviamo che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_c(t) = 0.$$

D'altra parte, se $c \neq \frac{1}{5}$, si ha

$$\varphi_c(t) \sim \mathrm{e}^{5t} \left(c + \frac{1}{5} \right) \to \operatorname{sign} \left(c + \frac{1}{5} \right) \infty$$

per $t \to +\infty$. Se invece $c = -\frac{1}{5}$ allora

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{-1/5}(t) = -\frac{1}{5}.$$

Pertanto esiste una sola soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}$, data da $\varphi_{-1/5}$.

Esercizio 3.

a. Determinare il piano osculatore π_0 alla curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = 2 + t - \mathrm{e}^t \\ z = 1 + t\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

nel punto P_0 corrispondente a $t = 0$.

b. Determinare il versore normale di γ nel punto P_0.

c. Calcolare la curvatura e il raggio di curvatura di γ nel punto P_0.

d. Determinare il centro di curvatura di γ nel punto P_0.

Soluzione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che rappresenta γ, ossia la funzione definita da

$$f(t) = (\mathrm{e}^t, 2 + t - \mathrm{e}^t, 1 + t\mathrm{e}^t)\,.$$

Si ha $f'(t) = (\mathrm{e}^t, 1 - \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t)$ e $f''(t) = (\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^t, 2\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t)$.

a. Per $t = 0$, si ha $P_0 = f(0) = (1, 1, 1)$, $f'(0) = (1, 0, 1)$ e $f''(0) = (1, -1, 2)$. Pertanto, l'equazione del piano osculatore π_0 è $[X - P_0, f'(0), f''(0)] = 0$, dove $X \equiv (x, y, z)$ ossia

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & x-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\pi_0 \ : \ x - y - z + 1 = 0\,.$$

b. Il versore tangente in P_0 è

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}\,.$$

Inoltre, essendo $f'(0) \wedge f''(0) = (1, -1, -1)$, il versore binormale in P_0 è

$$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(1, -1, -1)}{\sqrt{3}}\,.$$

Infine, versore normale in P_0 è

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(-1, -2, 1)}{\sqrt{6}}\,.$$

c. La curvatura e il raggio di curvatura di γ nel punto P_0 sono

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

e

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,.$$

d. Il centro di curvatura di γ nel punto P_0 è

$$C_0 = P_0 + \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (1, 1, 1) + \frac{2}{3}\,(-1, -2, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

COMPITO B

a. Si enunci e dimostri la formula dell'integrale generale delle equazioni lineari omogenee. (5 punti)

b. Si descriva come calcolare l'area di un parallelogramma in un piano e il volume di un parallelepipedo nello spazio. (3 punti)

Punteggi degli esercizi: Es.1: 7; Es.2: 7; Es.3: 10

Esercizio 1.
Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x}}{x^{3\alpha} \sqrt[3]{1+3x+x^3}} \, \mathrm{d}x$$

converge.

Soluzione. Poiché

$$\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x} = \frac{1+4x-1-x}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+x}} = \frac{3x}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+x}},$$

la funzione integranda

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x}}{x^{3\alpha} \sqrt[3]{1+3x+x^3}}$$

è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Si tratta quindi di studiare l'integrabilità di f in un intorno destro di 0 e in un intorno di $+\infty$.

Per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{3x}{2x^{3\alpha}} = \frac{3}{2} \frac{1}{x^{3\alpha-1}}.$$

La funzione $1/x^{3\alpha-1}$ è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ quando $3\alpha - 1 < 1$, ossia per $\alpha < \frac{2}{3}$. Pertanto, applicando il criterio del confronto asintotico, anche la funzione f è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ per $\alpha < \frac{2}{3}$.

Per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{3x}{3\sqrt{x}\, x^{3\alpha} \sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{x^{3\alpha+1-1/2}} = \frac{1}{x^{3\alpha+1/2}}.$$

La funzione $1/x^{3\alpha+1/2}$ è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ quando $3\alpha + \frac{1}{2} > 1$, ossia per $\alpha > \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che anche la funzione f è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ per $\alpha > \frac{1}{6}$.

In conclusione, la funzione f è integrabile in senso improprio, e quindi l'integrale I è convergente, se e soltanto se

$$\frac{1}{6} < \alpha < \frac{2}{3}.$$

Esercizio 2.
Data l'equazione differenziale

$$y' + 3y = \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{3t})^2},$$

a. determinarne le soluzioni (integrale generale);

b. dire se ne esiste almeno una limitata su tutto $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non-omogenea con coefficienti continui definiti su tutto $\mathbb{R}$, pertanto tutte le sue soluzioni saranno definite su tutto $\mathbb{R}$.

a. Per determinare tutte le soluzioni possiamo fissare un conveniente dato iniziale arbitrario, per esempio $y(0) = y_0$ con $y_0 \in \mathbb{R}$. Osserviamo anzitutto che la soluzione dell'equazione omogenea è

$$\varphi_O(t) = \mathrm{e}^{-3t} y_0$$

pertanto una soluzione particolare è data da

$$\varphi_P(t) = \mathrm{e}^{-3t} \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{3s}}{(1+\mathrm{e}^{3s})^2} ds.$$

Avremo quindi che l'integrale generale dell'equazione può essere espresso nel modo seguente

$$\varphi(t) = \varphi_O(t) + \varphi_P(t) = \mathrm{e}^{-3t} \left(y_0 + \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{3s}}{(1+\mathrm{e}^{3s})^2} ds \right).$$

Perciò

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-3t} \left(y_0 - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{3s}} \right]_0^t \right) = \mathrm{e}^{-3t} \left(y_0 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3(1+\mathrm{e}^{3t})} \right).$$

Posto dunque $c = y_0 + \frac{1}{6}$, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$\varphi_c(t) = \mathrm{e}^{-3t} \left(c - \frac{1}{3(1+\mathrm{e}^{3t})} \right).$$

b. Osserviamo che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_c(t) = 0.$$

D'altra parte, se $c \neq -\frac{1}{3}$, si ha

$$\varphi_c(t) \sim \mathrm{e}^{-3t} \left(c - \frac{1}{3} \right) \to \operatorname{sign} \left(c - \frac{1}{3} \right) \infty$$

per $t \to -\infty$. Se invece $c = \frac{1}{3}$ allora

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{1/3}(t) = \frac{1}{3}.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}$, data da $\varphi_{1/3}$.

Esercizio 3.

a. Determinare il piano osculatore π_0 alla curva

$$\gamma : \begin{cases} x = -\mathrm{e}^t \\ y = 2 + t - \mathrm{e}^t \\ z = -1 + t\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

nel punto P_0 corrispondente a $t = 0$.

b. Determinare il versore normale di γ nel punto P_0.

c. Calcolare la curvatura e il raggio di curvatura di γ nel punto P_0.

d. Determinare il centro di curvatura di γ nel punto P_0.

Soluzione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che rappresenta γ, ossia la funzione definita da

$$f(t) = (-\mathrm{e}^t, 2 + t - \mathrm{e}^t, -1 + t\mathrm{e}^t)\,.$$

Si ha $f'(t) = (-\mathrm{e}^t, 1 - \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t)$ e $f''(t) = (-\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^t, 2\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t)$.

a. Per $t = 0$, si ha $P_0 = f(0) = (-1, 1, -1)$, $f'(0) = (-1, 0, 1)$ e $f''(0) = (-1, -1, 2)$. Pertanto, l'equazione del piano osculatore π_0 è $[X - P_0, f'(0), f''(0)] = 0$, dove $X \equiv (x, y, z)$ ossia

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & x+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\pi_0 \; : \; x + y + z + 1 = 0\,.$$

b. Il versore tangente in P_0 è

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}\,.$$

Inoltre, essendo $f'(0) \wedge f''(0) = (1, 1, 1)$, il versore binormale in P_0 è

$$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}\,.$$

Infine, versore normale in P_0 è

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}}\,.$$

c. La curvatura e il raggio di curvatura di γ nel punto P_0 sono

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

e

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,.$$

d. Il centro di curvatura di γ nel punto P_0 è

$$C_0 = P_0 + \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (-1, 1, -1) + \frac{2}{3}\,(1, -2, 1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$