COMPITO A

1. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(2x)}{\ln(1+3x)-3\sin x}$$

Soluzione

Per $x \to 0$, valgono gli sviluppi:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \qquad \cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$$

$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Dunque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(2x)}{\ln(1+3x)-3\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+o(x^2)-1+2x^2+o(x^3)}{3x-\frac{9}{2}x^2-3x+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (4x+3)e^{\frac{1}{x}} \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(a) Trovare gli asintoti di $f(x)$;

(b) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f;

(c) Disegnare il grafico di f;

(d) Stabilire se l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

è convergente o divergente.

Soluzione

(a)

$$\lim_{x\to-\infty}(4x+3)e^{\frac{1}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to0^-}(4x+3)e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+}(4x+3)e^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(4x+3)e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Dunque $f(x)$ non ha asintoti orizzontali e ha $\boxed{\text{l'asintoto verticale } x=0}$. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{x}e^{\frac{1}{x}} = 4$$

Per $x\to+\infty$ (e anche per $x\to-\infty$) si ha $e^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$. Allora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[(4x+3)e^{\frac{1}{x}}-4x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[(4x+3)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-4x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[4x+4+o(1)+3+\frac{3}{x}++o\left(\frac{1}{x}\right)-4x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[7+o(1)] = 7\end{aligned}$$

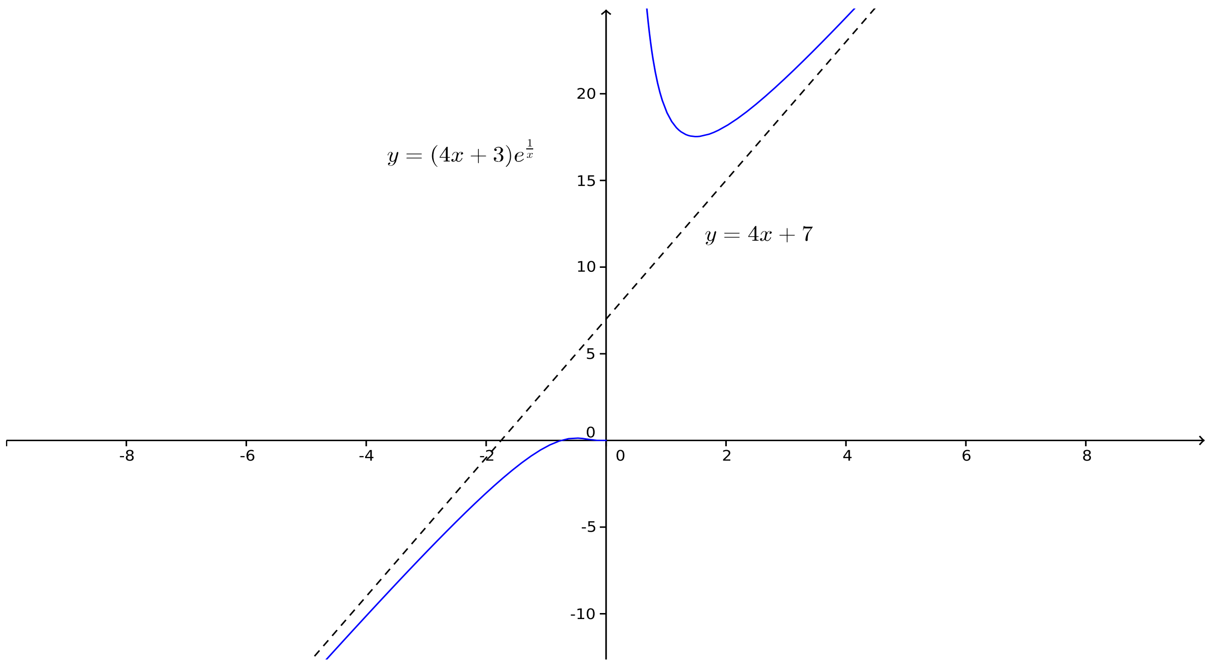
Nello stesso modo, si vede che $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-4x] = 7$. Dunque, $\boxed{y = 4x+7 \text{ è asintoto sia a } +\infty\text{, sia a } -\infty}$.

(b) La derivata

$$f'(x) = \frac{4x^2-4x-3}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$$

si annulla in $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{3}{2}$. Dallo studio del segno di $f'(x)$ (che coincide con il segno di $4x^2-4x-3$), si deduce che $\boxed{x_1 = -\frac{1}{2} \text{ è un punto di massimo locale}}$ e $\boxed{x_2 = \frac{3}{2} \text{ è un punto di minimo locale}}$.

(c)



(d) Poiché $e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = (4x+3)e^{\frac{1}{x}} \sim 3e^{\frac{1}{x}} > 3\frac{1}{x}$$

Per i criteri del confronto e del confronto asintotico, l'integrale generalizzato $\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \text{ è divergente}}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' + x^2 y = x^2 \tag{1}$$

   (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (11).
   (b) Sia $\overline{y}$ la soluzione particolare di (11) che soddisfa la condizione $\overline{y}(0) = 2$. Scrivere il polinomio di Maclaurin di $\overline{y}$ di ordine 3. (Non si richiede di trovare esplicitamente la soluzione $\overline{y}$.)
   (c) Trovare tutte le soluzioni non costanti dell'equazione (11) che hanno un punto di flesso in $x_0 = 0$.

Soluzione

(a) Posto

$$A(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{1}{3}x^3 \tag{2}$$

(al posto di 0 si potrebbe prendere un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$) la soluzione generale dell'equazione lineare (11) è data da

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_0^x e^{A(t)} t^2\, dt \\
&= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \int_0^x e^{\frac{t^3}{3}} t^2\, dt \\
&= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left[e^{\frac{t^3}{3}} \right]_0^x \\
&= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left(e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right) \\
&= (C-1)e^{-\frac{x^3}{3}} + 1
\end{aligned}$$

dove C è un'arbitraria costante reale. Posto $C - 1 = K$, la $\boxed{\text{soluzione generale}}$ dell'equazione lineare (11) è data da

$$\boxed{y_K(x) = Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \in \mathbb{R}} \tag{3}$$

L'equazione (11) ha un'unica soluzione costante, $y_0 = 1$, che si ottiene da (13) per $K = 0$.

(b) *Prima soluzione.*

Tenendo conto del fatto che $\overline{y}$ soddisfa l'equazione (11) e che $\overline{y}(0) = 2$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\overline{y}' = -x^2\overline{y} + x^2 && \overline{y}'(0) = 0 \\
&\overline{y}'' = -2x\overline{y} - x^2\overline{y}' + 2x && \overline{y}''(0) = 0 \\
&\overline{y}''' = -2\overline{y} - 2x\overline{y}' - 2x\overline{y}' - x^2\overline{y}'' + 2 && \overline{y}'''(0) = -4 + 2 = -2
\end{aligned}$$

Dunque il $\boxed{\text{polinomio di Maclaurin di ordine tre}}$ di $\overline{y}$ è $\boxed{2 - \dfrac{x^3}{3}}$

(b) *Seconda soluzione.* Dall'espressione della soluzione generale (13) segue che la soluzione particolare $\overline{y}$ è data da

$$\overline{y} = e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \tag{4}$$

Per $x \to 0$, $e^{-\frac{x^3}{3}} = 1 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Dunque il polinomio di Maclaurin di ordine tre di $e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$ è $\boxed{2 - \dfrac{x^3}{3}}$

(c) Dall'espressione della soluzione generale (13) segue che, per ogni soluzione non costante $y_K(x)$ $(K \neq 0)$, il polinomio di Maclaurin di ordine tre è dato da

$$(1 + K) - \frac{Kx^3}{3}$$

Quindi, ogni soluzione non costante

$$\boxed{y_K(x) = Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \neq 0} \tag{5}$$

dell'equazione (11) ha in $x_0 = 0$ un punto di flesso.

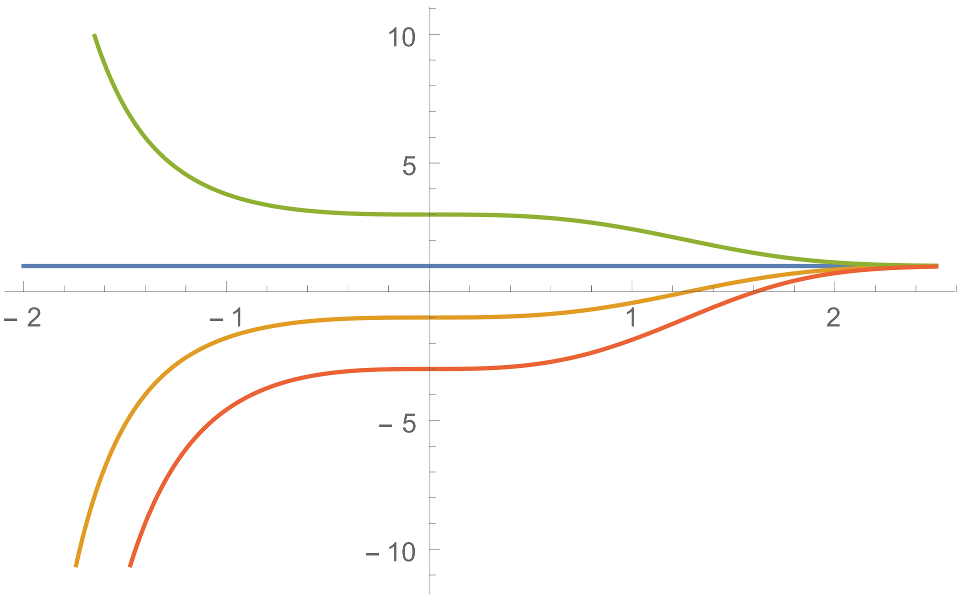


Figura 1: Grafici di $Ke^{-x^3/3}+1$, per $K = 2, 0, -2, -4$. Tutte le soluzioni $Ke^{-x^3/3}+1$ non costanti, cioè con $K \neq 0$, hanno un flesso in $x = 0$.

4. Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \\ z = 1 + t - 2t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Verificare che la curva γ è piana e determinare una equazione cartesiana del piano π che la contiene.

(b) Determinare la terna intrinseca della curva γ nel punto $P = (1, 1, 0)$.

Soluzione

(a) Consideriamo l'equazione di un generico piano $ax+by+cz+d = 0$ (con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$). La condizione necessaria e sufficiente affinché il piano contenga la curva γ è che risulti $at^3+bt+c(1+t-2t^3)+d = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ossia che risulti $(a - 2c)t^3 + (b + c)t + c + d = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò si verifica se e solo se il polinomio precedente nell'indeterminata t è il polinomio nullo, ossia se e solo se $a = 2c$, $b = -c$ e $d = -c$. Ciò si verifica per infiniti valori proporzionali non tutti nulli di a,b,c e d – ad esempio per $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -1$ – che corrispondono a un unico piano che contiene la curva γ: il piano di equazione $\boxed{2x - y + z - 1 = 0}$. Tale piano è il piano osculatore alla curva γ in un suo qualsiasi punto.

(b) Il punto $P = (1, 1, 0)$ corrisponde al valore $t = 1$ del parametro. Posto $\mathbf{r}(t) = (t^3, t, 1 + t - 2t^3)$, risulta $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 1, 1-6t)$ e quindi $\mathbf{r}'(1) = (3, 1, -5)$. Il versore tangente a γ in P vale quindi $\mathbf{T} = (\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{5}{\sqrt{35}})$. Il versore binormale a γ nel punto $P = (1, 1, 0)$ è parallelo a $\mathbf{w} = (2, -1, 1)$ (vettore ortogonale al piano osculatore); quindi vale $\mathbf{B} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Il versore normale si ottiene infine dal prodotto vettoriale $\mathbf{B} \times \mathbf{T}$; vale $(\frac{4}{\sqrt{210}}, \frac{13}{\sqrt{210}}, \frac{5}{\sqrt{210}})$.

COMPITO B

1. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\ln(1+4x) - 4\sin x}$$

Soluzione

Per $x \to 0$, valgono gli sviluppi:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \qquad \cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$$
$$\ln(1+4x) = 4x - 8x^2 + o(x^2) \qquad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Dunque:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\ln(1+3x) - 3\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 + o(x^2)}{4x - 8x^2 - 4x + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{-8x^2 + o(x^2)} = \boxed{-\tfrac{3}{8}}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (-4x-3)e^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(a) Trovare gli asintoti di $f(x)$;

(b) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f;

(c) Disegnare il grafico di f;

(d) Stabilire se l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx$$

è convergente o divergente.

Soluzione

(a)

$$\lim_{x\to-\infty} (-4x-3)e^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 0^-} (-4x-3)e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} (-4x-3)e^{\frac{1}{x}} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} (-4x-3)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

Dunque $f(x)$ non ha asintoti orizzontali e ha $\boxed{\text{l'asintoto verticale } x = 0}$. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x-3}{x} e^{\frac{1}{x}} = -4$$

Per $x \to +\infty$ (e anche per $x \to -\infty$) si ha $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} [f(x) + 4x] &= \lim_{x\to+\infty} \left[(-4x-3)e^{\frac{1}{x}} + 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[(-4x-3)\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[-4x - 4 + o(1) - 3 - \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} [-7 + o(1)] = -7
\end{aligned}$$

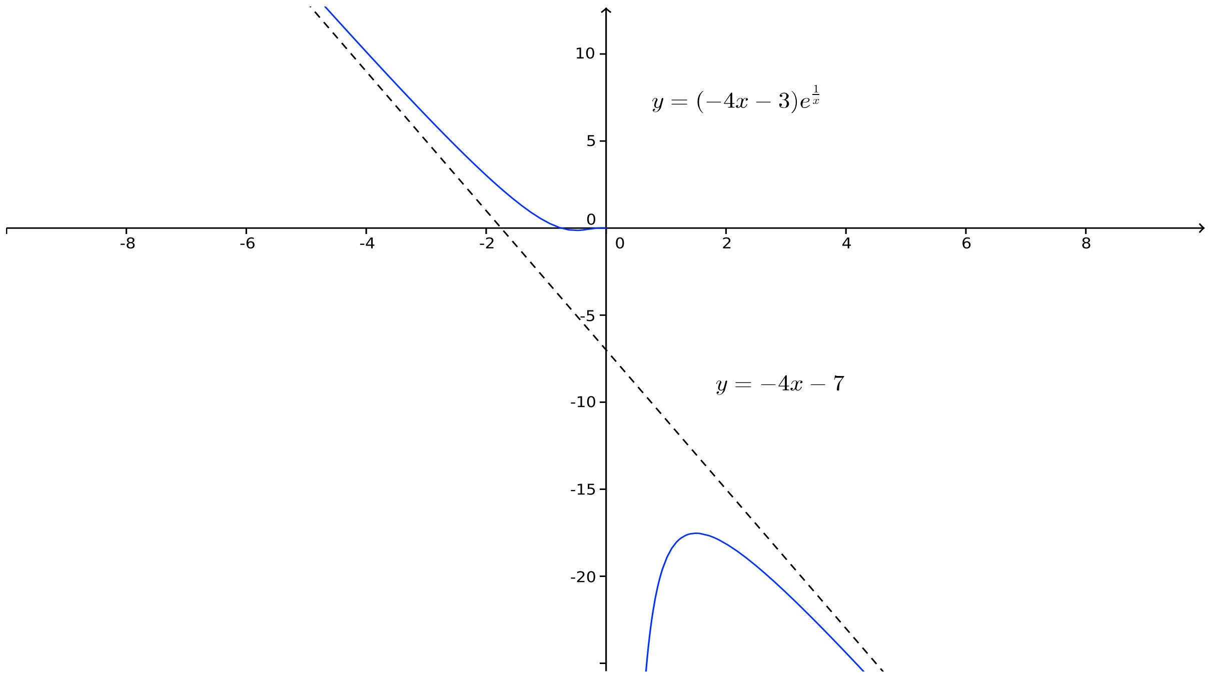
Nello stesso modo, si vede che $\lim_{x\to-\infty} [f(x) + 4x] = -7$. Dunque, $\boxed{y = -4x - 7 \text{ è asintoto sia a } +\infty, \text{ sia a } -\infty}$.

(b) La derivata

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4x + 3}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

si annulla in $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{3}{2}$. Dallo studio del segno di $f'(x)$ (che coincide con il segno di $-4x^2 + 4x + 3$), si deduce che $\boxed{x_1 = -\frac{1}{2} \text{ è un punto di minimo locale}}$ e $\boxed{x_2 = \frac{3}{2} \text{ è un punto di massimo locale}}$.

(c)



(d) Poiché $e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per $x \to 0^+$:

$$|f(x)| = |-4x-3|e^{\frac{1}{x}} \sim 3e^{\frac{1}{x}} > 3\frac{1}{x} > 0$$

Per i criteri del confronto e del confronto asintotico, l'integrale generalizzato $\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \text{ è divergente}}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale
$$y' + x^2 y = x^2 \tag{6}$$
   (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (11).
   (b) Sia $\overline{y}$ la soluzione particolare di (11) che soddisfa la condizione $\overline{y}(0) = 3$. Scrivere il polinomio di Maclaurin di $\overline{y}$ di ordine 3. (Non si richiede di trovare esplicitamente la soluzione $\overline{y}$.)
   (c) Trovare tutte le soluzioni non costanti dell'equazione (11) che hanno un punto di flesso in $x_0 = 0$.

Soluzione

(a) Posto
$$A(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{1}{3}x^3 \tag{7}$$
(al posto di 0 si potrebbe prendere un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$) la soluzione generale dell'equazione lineare (11) è data da

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_0^x e^{A(t)} t^2\, dt \\
&= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \int_0^x e^{\frac{t^3}{3}} t^2\, dt \\
&= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left[e^{\frac{t^3}{3}} \right]_0^x \\
&= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left(e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right) \\
&= (C-1)e^{-\frac{x^3}{3}} + 1
\end{aligned}$$

dove C è un'arbitraria costante reale. Posto $C - 1 = K$, la $\boxed{\text{soluzione generale}}$ dell'equazione lineare (11) è data da
$$\boxed{Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \in \mathbb{R}} \tag{8}$$
L'equazione (11) ha un'unica soluzione costante, $y_0 = 1$, che si ottiene da (13) per $K = 0$.

(b) *Prima soluzione.*

Tenendo conto del fatto che $\overline{y}$ soddisfa l'equazione (11) e che $\overline{y}(0) = 3$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\overline{y}' &= -x^2\overline{y} + x^2 & \qquad \overline{y}'(0) &= 0 \\
\overline{y}'' &= -2x\overline{y} - x^2\overline{y}' + 2x & \qquad \overline{y}''(0) &= 0 \\
\overline{y}''' &= -2\overline{y} - 2x\overline{y}' - 2x\overline{y}' - x^2\overline{y}'' + 2 & \qquad \overline{y}'''(0) &= -6 + 2 = -4
\end{aligned}$$

Dunque il $\boxed{\text{polinomio di Maclaurin di ordine tre}}$ di $\overline{y}$ è $\boxed{3 - \dfrac{2x^3}{3}}$

(b) *Seconda soluzione.* Dall'espressione della soluzione generale (13) segue che la soluzione particolare $\overline{y}$ è data da
$$\overline{y} = 2e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \tag{9}$$
Per $x \to 0$, $e^{-\frac{x^3}{3}} = 1 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Dunque il polinomio di Maclaurin di ordine tre di $2e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$ è $\boxed{3 - \dfrac{2x^3}{3}}$

(c) Dall'espressione della soluzione generale (13) segue che, per ogni soluzione non costante $y_K(x)$ $(K \neq 0)$, il polinomio di Maclaurin di ordine tre è dato da
$$(1 + K) - \frac{Kx^3}{3}$$

Quindi, ogni soluzione non costante

$$\boxed{y_K(x) = Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \neq 0} \tag{10}$$

dell'equazione (11) ha in $x_0 = 0$ un punto di flesso.

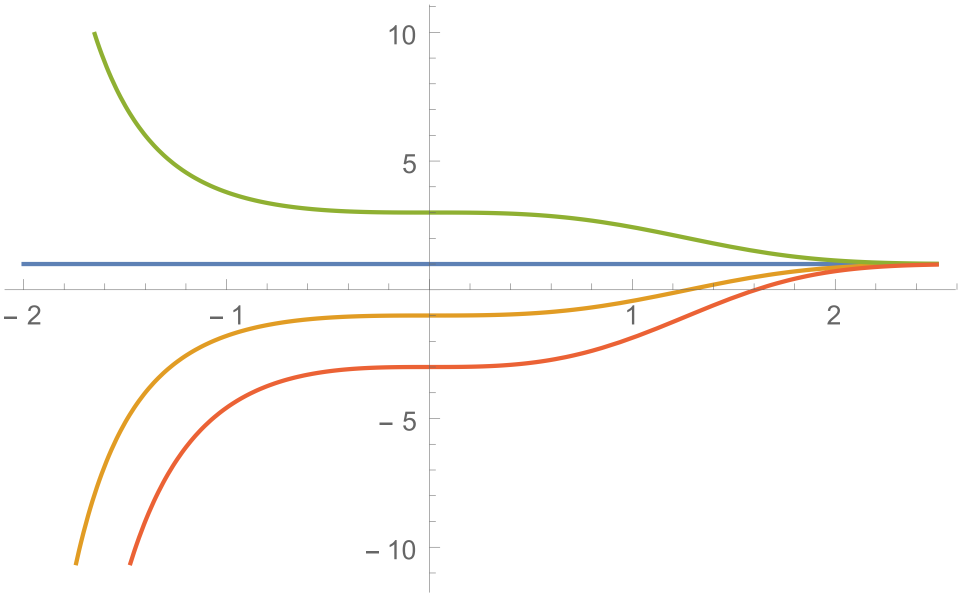


Figura 2: Grafici di $Ke^{-x^3/3}+1$, per $K = 2, 0, -2, -4$. Tutte le soluzioni $Ke^{-x^3/3}+1$ non costanti, cioè con $K \neq 0$, hanno un flesso in $x = 0$.

4. Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \\ z = 1 + t - 2t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Verificare che la curva γ è piana e determinare una equazione cartesiana del piano π che la contiene.

(b) Determinare la terna intrinseca della curva γ nel punto $P = (1, 1, 0)$.

Soluzione

(a) Consideriamo l'equazione di un generico piano $ax+by+cz+d = 0$ (con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$). La condizione necessaria e sufficiente affinché il piano contenga la curva γ è che risulti $at+bt^3+c(1+t-2t^3)+d = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ossia che risulti $(b-2c)t^3 + (a+c)t + c + d = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò si verifica se e solo se il polinomio precedente nell'indeterminata t è il polinomio nullo, ossia se e solo se $b = 2c$, $a = -c$ e $d = -c$. Ciò si verifica per infiniti valori proporzionali non tutti nulli di a,b,c e d – ad esempio per $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$ e $d = 1$ – che corrispondono a un unico piano che contiene la curva γ: il piano di equazione $\boxed{x - 2y - z + 1 = 0}$. Tale piano è il piano osculatore alla curva γ in un suo qualsiasi punto.

(b) Il punto $P = (1, 1, 0)$ corrisponde al valore $t = 1$ del parametro. Posto $\mathbf{r}(t) = (t, t^3, 1 + t - 2t^3)$, risulta $\mathbf{r}'(t) = (1, 3t^2, 1-6t)$ e quindi $\mathbf{r}'(1) = (1, 3, -5)$. Il versore tangente a γ in P vale quindi $\mathbf{T} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, -\frac{5}{\sqrt{35}})$. Il versore binormale a γ nel punto $P = (1, 1, 0)$ è parallelo a $\mathbf{w} = (1, -2, -1)$ (vettore ortogonale al piano osculatore); quindi vale $\mathbf{B} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$. Il versore normale si ottiene infine dal prodotto vettoriale $\mathbf{B} \times \mathbf{T}$; vale $(\frac{13}{\sqrt{210}}, \frac{4}{\sqrt{210}}, \frac{5}{\sqrt{210}})$.

COMPITO C

1. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\ln(1+5x) - 5\sin x}$$

Soluzione

Per $x \to 0$, valgono gli sviluppi:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \qquad \cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$$

$$\ln(1+5x) = 5x - \frac{25}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\ln(1+3x) - 3\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 + o(x^3)}{3x - \frac{25}{2}x^2 - 3x + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{-\frac{25}{2}x^2 + o(x^2)} = \boxed{-\frac{6}{25}}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = (-4x+3)e^{-\frac{1}{x}} \qquad x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

(a) Trovare gli asintoti di $f(x)$;

(b) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f;

(c) Disegnare il grafico di f;

(d) Stabilire se l'integrale generalizzato

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

è convergente o divergente.

Soluzione

(a)

$$\lim_{x\to-\infty} (-4x+3)e^{-\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} (-4x+3)e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} (-4x+3)e^{-\frac{1}{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} (-4x+3)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

Dunque $f(x)$ non ha asintoti orizzontali e ha $\boxed{\text{l'asintoto verticale } x=0}$. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+3}{x} e^{-\frac{1}{x}} = -4$$

Per $x \to +\infty$ (e anche per $x \to -\infty$) si ha $e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} [f(x)+4x] &= \lim_{x\to+\infty} \left[(-4x+3)e^{-\frac{1}{x}} + 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[(-4x+3)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[-4x + 4 + o(1) + 3 - \frac{3}{x} + +o\left(\frac{1}{x}\right) + 4x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} [7 + o(1)] = 7
\end{aligned}$$

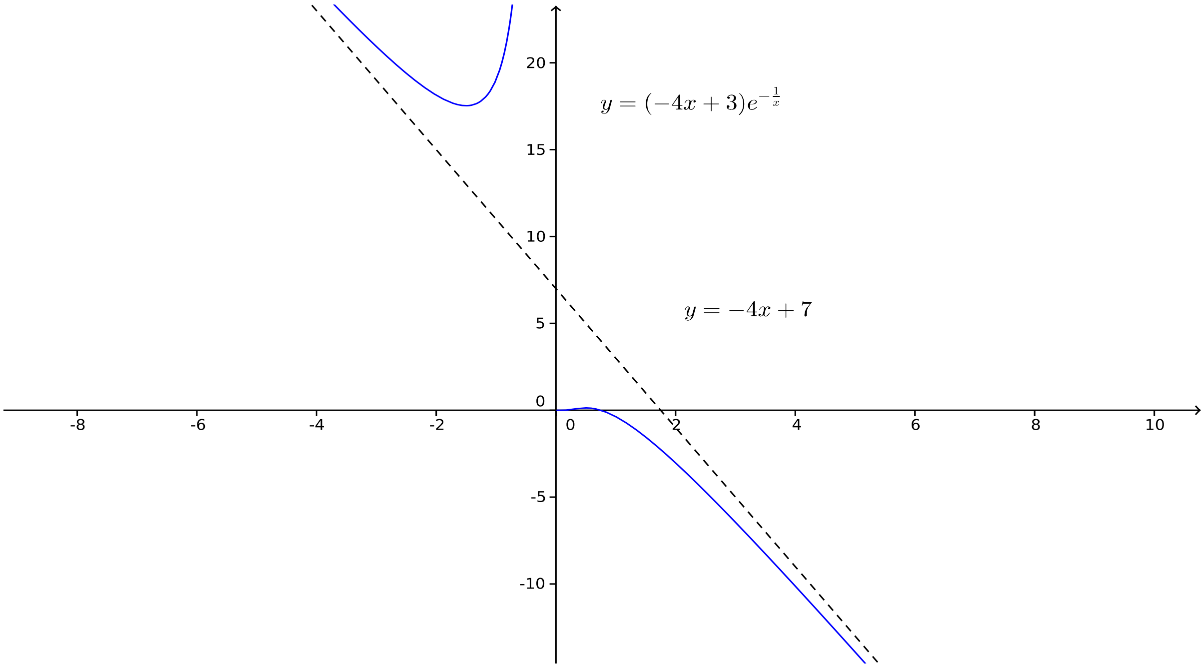
Nello stesso modo, si vede che $\lim_{x\to-\infty} [f(x)+4x] = 7$. Dunque, $\boxed{y = -4x+7 \text{ è asintoto sia a } +\infty, \text{ sia a } -\infty}$.

(b) La derivata

$$f'(x) = \frac{4x^2+4x-3}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

si annulla in $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$. Dallo studio del segno di $f'(x)$ (che coincide con il segno di $4x^2+4x-3$), si deduce che $\boxed{x_1 = \frac{1}{2} \text{ è un punto di massimo locale}}$ e $\boxed{x_2 = -\frac{3}{2} \text{ è un punto di minimo locale}}$.

(c)



(d) Per $x \to 0^-$,

$$f(x) = (-4x + 3)e^{-\frac{1}{x}} \sim 3e^{-\frac{1}{x}} > -3\frac{1}{x} > 0$$

perché $e^{-\frac{1}{x}} > -\frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$.

Per i criteri del confronto e del confronto asintotico, l'integrale generalizzato $\boxed{\int_{-1}^{0} f(x)\, dx \text{ è divergente}}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' + x^2 y = x^2 \tag{11}$$

(a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (11).

(b) Sia $\overline{y}$ la soluzione particolare di (11) che soddisfa la condizione $\overline{y}(0) = 4$. Scrivere il polinomio di Maclaurin di $\overline{y}$ di ordine 3. (Non si richiede di trovare esplicitamente la soluzione $\overline{y}$.)

(c) Trovare tutte le soluzioni non costanti dell'equazione (11) che hanno un punto di flesso in $x_0 = 0$.

Soluzione

(a) Posto

$$A(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{1}{3}x^3 \tag{12}$$

(al posto di 0 si potrebbe prendere un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$) la soluzione generale dell'equazione lineare (11) è data da

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_0^x e^{A(t)} t^2\, dt \\ &= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \int_0^x e^{\frac{t^3}{3}} t^2\, dt \\ &= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left[e^{\frac{t^3}{3}} \right]_0^x \\ &= Ce^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left(e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right) \\ &= (C-1)e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \end{aligned}$$

dove C è un'arbitraria costante reale. Posto $C - 1 = K$, la soluzione generale dell'equazione lineare (11) è data da

$$\boxed{Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \in \mathbb{R}} \tag{13}$$

L'equazione (11) ha un'unica soluzione costante, $y_0 = 1$, che si ottiene da (13) per $K = 0$.

(b) *Prima soluzione.*

Tenendo conto del fatto che $\overline{y}$ soddisfa l'equazione (11) e che $\overline{y}(0) = 2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} &\overline{y}\prime = -x^2\overline{y} + x^2 && \overline{y}\prime(0) = 0 \\ &\overline{y}\prime\prime = -2x\overline{y} - x^2\overline{y}\prime + 2x && \overline{y}\prime\prime(0) = 0 \\ &\overline{y}\prime\prime\prime = -2\overline{y} - 2x\overline{y}\prime - 2x\overline{y}\prime - x^2\overline{y}\prime\prime + 2 && \overline{y}\prime\prime\prime(0) = -8 + 2 = -6 \end{aligned}$$

Dunque il polinomio di Maclaurin di ordine tre di $\overline{y}$ è $\boxed{4 - x^3}$

(b) *Seconda soluzione.* Dall'espressione della soluzione generale (13) segue che la soluzione particolare $\overline{y}$ è data da

$$\overline{y} = 3e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \tag{14}$$

Per $x \to 0$, $e^{-\frac{x^3}{3}} = 1 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Dunque il polinomio di Maclaurin di ordine tre di $3e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$ è $\boxed{4 - x^3}$

(c) Dall'espressione della soluzione generale (13) segue che, per ogni soluzione non costante $y_K(x)$ $(K \neq 0)$, il polinomio di Maclaurin di ordine tre è dato da

$$(1 + K) - \frac{Kx^3}{3}$$

Quindi, ogni soluzione non costante

$$\boxed{y_K(x) = Ke^{-\frac{x^3}{3}} + 1, \qquad K \neq 0} \tag{15}$$

dell'equazione (11) ha in $x_0 = 0$ un punto di flesso.

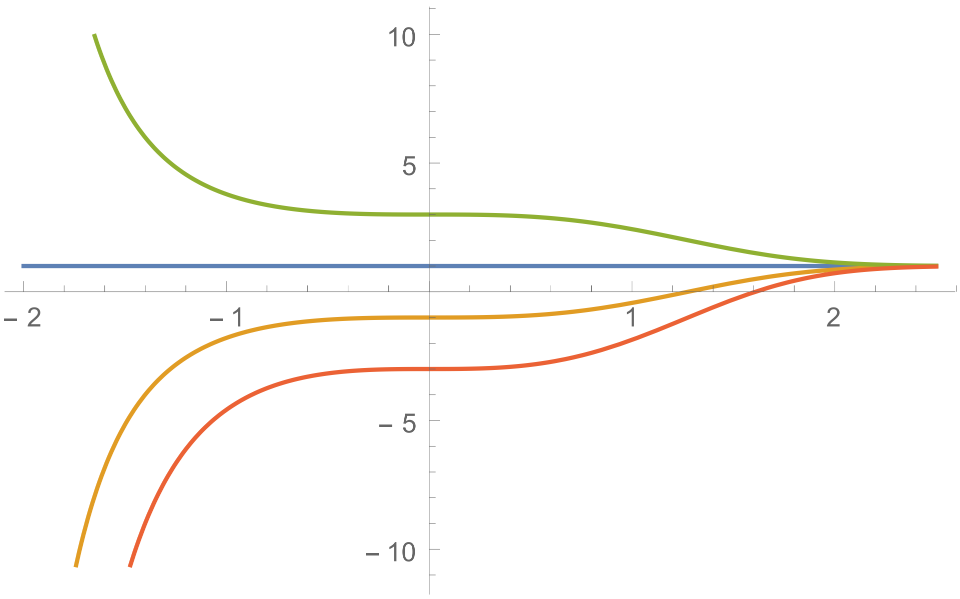


Figura 3: Grafici di $Ke^{-x^3/3}+1$, per $K = 2, 0, -2, -4$. Tutte le soluzioni $Ke^{-x^3/3}+1$ non costanti, cioè con $K \neq 0$, hanno un flesso in $x = 0$.

4. Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = -t \\ z = 1 + t - 2t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Verificare che la curva γ è piana e determinare una equazione cartesiana del piano π che la contiene.

(b) Determinare la terna intrinseca della curva γ nel punto $P = (1, -1, 0)$.

Soluzione

(a) Consideriamo l'equazione di un generico piano $ax+by+cz+d=0$ (con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$). La condizione necessaria e sufficiente affinché il piano contenga la curva γ è che risulti $at^3-bt+c(1+t-2t^3)+d=0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ossia che risulti $(a-2c)t^3+(-b+c)t+c+d=0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò si verifica se e solo se il polinomio precedente nell'indeterminata t è il polinomio nullo, ossia se e solo se $a = 2c$, $b = c$ e $d = -c$. Ciò si verifica per infiniti valori proporzionali non tutti nulli di a,b,c e d – ad esempio per $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = -1$ – che corrispondono a un unico piano che contiene la curva γ: il piano di equazione $\boxed{2x + y + z - 1 = 0}$. Tale piano è il piano osculatore alla curva γ in un suo qualsiasi punto.

(b) Il punto $P = (1, -1, 0)$ corrisponde al valore $t = 1$ del parametro. Posto $\mathbf{r}(t) = (t^3, -t, 1 + t - 2t^3)$, risulta $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, -1, 1 - 6t)$ e quindi $\mathbf{r}'(1) = (3, -1, -5)$. Il versore tangente a γ in P vale quindi $\mathbf{T} = (\frac{3}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{5}{\sqrt{35}})$. Il versore binormale a γ nel punto $P = (1, 1, 0)$ è parallelo a $\mathbf{w} = (2, 1, 1)$ (vettore ortogonale al piano osculatore); quindi vale $\mathbf{B} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Il versore normale si ottiene infine dal prodotto vettoriale $\mathbf{B} \times \mathbf{T}$; vale $(-\frac{4}{\sqrt{210}}, \frac{13}{\sqrt{210}}, -\frac{5}{\sqrt{210}})$.